SPIS TREŚCI

1. TEST SERII JAKO TEST LOSOWOŚCI PRÓBY

W tym teście z populacji generalnej o dowolnym rozkładzie pobieramy próbę n elementów. Sprawdzamy hipotezę, że sposób pobierania próby (doboru elementów) jest losowy.

Tworzymy ciąg uporządkowany według kolejności pobierania elementów. Obliczamy medianę z póby. Każdemu wynikowi mniejszemu od mediany przypisujemy symbol A, a większemu od niej - symbol B. Liczba elementów A = n_1, liczba elementów B = n_2. Wyniki równe medianie odrzucamy. W ten sposób otrzymujemy n-elementowy ciąg ($n + n_1 + n_2$) mieszany składający się z symboli A i B. Obliczamy liczbę u serii; np. w ciągu:

A BB AA BBB AAAA B AA B

liczba serii u = 8.

Jeżeli hipoteza o losowości próby jest prawdziwa liczba serii powinna być zgodna z rozkładem tabelarycznycm. W oparciu o ten rozkład tworzymy dwustronny obszar krytyczny odczytując u_{α_1} przy $1/2\ \alpha = 0.05$ i u_{α_2} przy $1/2\ \alpha = 0.95$. Wartość empiryczną u porównujemy z u_{α_1} i u_{α_2}. Jeżeli zachodzi nierówność, że $u \le u_{\alpha_1}$ lub $u \ge u_{\alpha_2}$ wówczas hipotezę o losowości próby odrzucamy. Jeśli $u_{\alpha_1} < u < u_{\alpha_2}$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy o losowości próby.

Przykład 1. Po otwarciu ula złapano kolejno pierwsze 15 pszczół, które wyleciały. Zbadano ich ciężar ciała. Miały one następujące ciężary, ustawione według kolejności wylatywania: 37, 40, 36, 39, 38, 43, 46, 50, 49, 55, 48, 32, 56, 62, 53. Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zweryfikować hipotezę, że taki dobór pszczół jest losowy.

Rozwiązanie. Porządkujemy wyniki aby obliczyć medianę z próby:

32	40	50
36	43	53
37	$\boxed{46}$	55
38	48	56
39	49	62

Me = 46

Symbolem A oznaczamy wyniki mniejsze od mediany, symbolem B - wyniki większe. Wynik równy medianie pomijamy:

AAAAAA BBBB A BBB.

Liczba serii $u = 4$, $n_1(A) + 7$, $n_2(B) = 7$. Z tab. 1 odczytujemy $u_{\alpha_1} = 4$ dla $1/2\alpha = 0.05$ oraz $u_{\alpha_2} = 11$ dla $1 - 1/2\alpha = 0.95$. Ponieważ $u = 4 = u_{\alpha_1}$ odrzucamy hipotezę o losowości próby. Z ula wylatywały najpierw osobniki lżejsze, o większej ruchliwości.

Przy większej liczebności prób, gdy n_1 i n_2 są większe niż 20 można zastosować aproksymację rozkładem normalnym - obliczamy:

$$z = \frac{u-\mu_u}{\sigma_u}$$

gdzie: $$\mu_u = \frac{2n_1n_2}{n} + 1$$

a $$\sigma = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n)}{n^2(n-1)}}$$

Obliczoną wartość porównujemy z wartościami z_α odczytanymi z tab. 2.

Piśmiennictwo: Greń, 1978; Siegel, 1956; Norcliffe, 1986.

2. TESTY ZGODNOŚCI ROZKŁADÓW EMPIRYCZNEGO I ZAKŁADANEGO

2. 1. Test Kołmogorowa

Porównujemy zgodność dystrybuant rozkładu empirycznego (z próby) i teoretycznego. Zakładamy przy tym, że waertości obu dystrybuant są zbliżone, jeżeli populacja generalna ma rozkład zgodny z hipotezą. W rozkładzie λ zakłada się, że dystrybuanta teoretyczna jest ciągła. Jeżeli nie jest ciągła - należy użyć testu χ^2. Parametry rozkładu teoretycznego powinny być znane, ale jeśli próba jest duża można je oszacować na jej podstawie.

W tym teście obliczamy bezwzględne wartości różnic dystrybuant empirycznej i teoretycznej (dla prawej wartości skrajnej przedziału) i znajdujemy wartość D równą wartości największej różnicz pomiędzy dystrybuantami. Na tej podstawie obliczamy wartość statystyki λ i porównujemy ją z wartością krytyczną λ_α otrzymaną z tabeli rozkładu λ Kołmogorowa dla założonego poziomu istotności. Jeżeli $\lambda < \lambda_\alpha$ przyjmujemy hipotezę, że rozkłady są zgodne. Rozszerzenie testu dla rozkładów dyskretnych opisali Pettit i Stephens (1977).

Przykład. 2. Zbadano zdolność pobierania pokarmu prze pewien gatunek owada roślinożernego. Otrzymano następujące wyniki:

masa pokarmu zjedzonego w ciągu doby	liczba osobników
0-2	3
2-4	5
4-6	12
6-8	20
8-10	19
10-12	16
12-14	8
14-16	4

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że rozkład zdolności pobierania pokarmu jest normalny.

Rozwiązanie. Obliczamy średnią ważoną według wzoru:

$$\bar{x} = 1/n\sum(\mathring{x}_i - \bar{x})^2 n_i$$ [1]

Aby obliczyć średnią i odchylenie standartowe tworzymy tabelę:

$\mathring{x}_i$	n_i	$\mathring{x}_i n_i$	$(\mathring{x}_i - \bar{x})^2 n_i$ [2]
1	3	3	164.3
3	5	15	145.8
5	12	60	138.7
7	20	140	39.2
9	19	171	6.8
11	16	176	108.2
13	8	104	169.3
15	4	60	174.2
	87	729	946.5

$$\bar{x} = 729/87 = 8.38 \cong 8.4, \quad s = \sqrt{\frac{946.5}{87}} = 3.3$$

Po obliczeniu średniej i odchylenia standartowego obliczamy wartość zmiennej losowej:

$$z = \frac{x_{i_\circ} - \bar{x}}{s}$$

gdzie $x_{i_\circ}$ oznacza górną wartość w przedziale. Następnie z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego (tab. 2) odczytujemy wartości dystrybuanty ø(z) dla poszczególnych z i otrzymujemy

[1] W przypadku gdy liczba przedziałów jest mała, a długość n przedziałów jest duża, obliczamy poprawkę na grupowanie odejmując od wartości pod pierwiastkiem wartość $1/2h^2$, gdzie h oznacza długość przedziału klasowego

[2] Wartość przedziału klasowego obliczamy następująco: $3(1-8.4)^2$.

dystrybuantę teoretyczną:

x_{i_o}	z	$\varnothing(z) = \hat{F}(x)$
2	-1.94	0.0262
4	-1.33	0.0918
6	-0.73	0.2327
8	-0.12	0.4522
10	0.48	0.6844
12	1.09	0.8621
14	1.70	0.9554
16	2.30	0.9893

Następnie tworzymy liczebności skumulowane n_{sk} aby potem dla każdego x_{i_o} obliczyć wartości empiryczne dystrybuanty Fn(x) przy użyciu wzoru:

$$Fn(x_k) = \frac{n_{sk}}{n}$$

gdzie $n_{sk} = \sum_{i \le k} n_i$ oznacza liczebność skumulowaną, a n - liczebność ogólną próby. Tworzymy tabelę:

x_{i_o}	n_i	n_{sk}	Fn(x)[3]
2	3	3	0.0345
4	5	8	0.0920
6	12	20	0.2299
8	20	40	0.4598
10	19	59	0.6782
12	16	75	0.8621
14	8	83	0.9540
16	4	87	1.0000

[3] Wartość Fn(x) obliczamy dzieląc np. 3/87, 8/87 etc.

Dla każdego x_{i_o} obliczamy bezwzględne wartości różnicy dystrybuant empirycznej $Fn(x)$ i teoretycznej $\hat{F}(x)$. Szukamy największej wartości różnicy D:

$$D = \sup_{x} \left| Fn(x) - \hat{F}(x) \right|$$

Obliczenia wykonujemy w tabeli:

x_{i_o}	$Fn(x)$	$\hat{F}(x)$	$\lvert Fn(x) - \hat{F}(x) \rvert$
2	0.0345	0.0262	0.0083
4	0.0920	0.0918	0.0002
6	0.2299	0.2327	0.0028
8	0.4598	0.4522	0.0076
10	0.6782	0.6844	0.0062
12	0.8621	0.8621	0.0000
14	0.9540	0.9554	0.0014
16	1.0000	0.9893	0.0107 = D

$$D = 0.0107$$

Obliczamy $\lambda = d\sqrt{n} = 0.0107\sqrt{87} = 0.0998$.

Wartość tą porónujemy z wartością krytyczną λ_α z tab. 3 dla $\alpha = 0.05$. Wartość $\lambda_\alpha = 1.3581$. Ponieważ $\lambda = 0.0107 < \lambda_\alpha = 1.3581$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że rozkład zdolności pobierania pokarmu jest normalny. Gdyby $\lambda \geq \lambda_\alpha$ hipotezę musielibyśmy odrzucić.

Przykład. 3. Badania długości ciała mszyc w populacji lokalnej dały następujące wyniki:

długość ciała	liczba osobników
2.95-3.05	12
3.05-3.15	23
3.15-3.25	35
3.25-3.35	62
3.35-3.45	44
3.45-3.55	18
3.55-3.65	6
$n = 200$	

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że rozkład długości ciała jest normalny.

Rozwiązanie. Obliczamy średnią i odchylenie standartowe. W tym celu tworzymy tabelkę:

$\mathring{x}_i$	$\mathring{x}_i n_i$	$(\mathring{x}_i - \bar{x})^2 n_i$
3.0	36.0	1.0092
3.1.	71.3	0.8303
3.2	112.0	0.2835
3.3	204.6	0.0062
3.4	149.6	0.5324
3.5	63.0	0.7938
3.6	21.6	0.5766
	658.1	4.0320

$$\bar{x} = \frac{658.1}{200} = 3.29 \qquad s = \sqrt{\frac{4.0320}{200}} = 0.14$$

Znajdujemy wartość zmiennej losowej z i odczytujemy wartość dystrybuanty $\phi(z) = F(x)$; tworzymy wartości skumulowane i obliczamy wartości dystrybuanty $Fn(x)$ po czym obliczamy wartość różnicy $|Fn(x) - F(x)|$ i znajdujemy wartość D:

$\overset{\circ}{x}_i$	z	$\phi(z) = \hat{F}(x)$	n_i	n_{sk}	Fn(x)	|Fn(x)-F(x)|
3.05	-1.71	0.0436	12	12	0.0600	0.0164
3.31	-1.00	0.1587	23	35	0.1750	0.0163
3.25	-0.29	0.3859	35	70	0.3500	0.0359 = D
3.35	0.43	0.6664	62	132	0.6600	0.0064
3.45	1.14	0.8729	44	176	0.8800	0.0071
3.55	1.86	0.9686	18	194	0.9700	0.0014
3.65	2.57	0.9995	6	200	1.0000	0.0005

$$D = 0.0359 \quad \lambda = 0.0359\sqrt{200} = 0.5077$$

Krytyczna wartość graniczna λ_α przy $\alpha = 0.05$ wynosi 1.3581 (tab. 3). Ponieważ $\lambda = 0.5077 < \lambda_\alpha = 1.3581$ nie można odrzucić hipotezy, że rozkład długości ciała jest normalny.

Uwaga. Często zamiast wartości λ używa się wartości D. Jeżeli wartość $D \geq D_\alpha$ hipotezę odrzucamy. Jeżeli $D < D_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Przykład. 4. W przykładzie 2 wartość $D = 0.0107 < D_\alpha = 0.1456$ obliczonego przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ dla $n = 87$ (tab. 4). Nia ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza poprzedni wniosek.

Przyklad 5. W przykładzie 3 wartość $D = 0.0359$ dla $n = 200$.

$$D_\alpha = 1.3581/\sqrt{200} = 0.0962$$

przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Ponieważ $D = 0.0359 < D_\alpha = 0.0962$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza poprzedni wniosek.

Piśmiennictwo: Neave, 1981; Greń, 1978; Bielecki, Jurkiewicz, Szymanowska, 1978; Massey, 1951; Kołmogorov, 1933, Smirnov, 1939; Muller, 1956; Pettit, Stephens, 1977.

2. 2. Testy χ^2

Przy użyciu testów zgodności χ^2 określa się czy badana próba ma określony rozkład. Możliwe są 2 przypadki: a) gdy parametry tego rozkładu są znane, b) gdy parametry rozkładu nie są znane.

2. 2. 1. Test zgodności χ^2 przy wyszczególnionych parametrach rozkładu

Najprostszą miarą odchyleń rozkładu w próbie od rozkładu zakładanego jest wielkość obliczona z wzoru:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (f_o - f_t)^2}{f_t}$$

gdzie f_o oznacza liczebność próby, f_t - liczebność oczekiwaną, a k - liczbę badanych grup. Liczba stopni swobody $\nu = k - 1$. Liczebność f_o nie może nbyć mniejsza od 5 (niektórzy autorzy przyjmują liczbę 10). Jeżeli liczebność jest mniejsza należy zsumować sąsiednie liczebności, tak aby uzyskać $f_o \geq 5$.

Jeżeli $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$ odczytanego z tablicy dla $\nu = k - 1$ stopni swobody, przy zakładanym poziomie istotności α hipotezę o zgodności rozkładu z próby z zakładanym odrzucamy. Jeżeli $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Jeżeli $\nu > 30$ obliczamy wartość:

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

i wartość tą porównujemy z krytycznymi wartościami t_α w rozkładzie t STUDENTA przy założonym poziomie istotności α i dla $\nu = \infty$ liczby stopni swobody.

Przykład 6. W doświadczeniach genetycznych nad dziedziczeniem wzoru użyłkowania skrzydeł (A i B) i odcieni zabarwienia czułek (C i D) uzyskano następujące rozszczepienie cech: 120 osobników z cechą A i C, 48 osobników z cechą A i D, 36 osobników z cechą B i C oraz 13 osobników z cechami B i D przy zakładanym stosunku 9:3:3:1.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że wyniki doświadczenia są zgodne z teorią.

Rozwiązanie. $9 + 3 + 3 + 1 = 16$

Prawdopodobieństwa zakładane wynoszą:

$p_{AC} = 9/16$, $p_{AD} = 3/16$, $p_{BC} = 3/16$, $p_{BD} = 1/16$

$n = 120 + 48 + 36 + 13 = 217$

a zatem prawdopodobieństwa oczekiwane wynoszą:

$f_{AC} = 217(9/16) = 122.06$

$f_{AD} = 217(3/16) = 40.69$

$f_{BC} = 217(3/16) = 40.69$

$f_{BD} = 217(1/16) = 13.56$

Obliczamy wartość statystyki:

$$\chi^2 = \frac{(120 - 122.06)^2}{122.06} + \frac{(48-40.69)^2}{40.69} + \frac{(36 - 40.69)^2}{40.69} + \frac{(13-13.56)^2}{13.56} = 1.912$$

$\chi^2_\alpha = 7.815$ przy $\alpha = 0.05$ i $\nu = k - 1 = 4 - 1 = 3$ stopniach swobody (tabl. 5). Ponieważ $\chi^2_\alpha > \chi^2$ nie ma podstaw do odrzucenia założonej hipotezy. Wyniki doświadczenia są zgodne z teorią.

Uwaga 1. Jeżeli wyniki próby należą do dwóch wzajemnie wykluczających się grup (tak - nie, 0 - 1, etc.) wartość obliczamy z wzoru:

$$\chi^2 = \frac{(f_{\circ q} - np^\circ)^2}{np^\circ(1 - p^\circ)}$$

gdzie p° oznacza prawdopodobieśntwo o z góry założonej (podanej) wartości, $f_\circ$ oznacza ilość obserwacji "tak" wśród n niezależnych prób.

Wartość graniczną χ^2_α odczytujemy dla danego poziomu istotności przy $\nu = 1$ stopniu swobody.

Przykład 7. W doświadczeniu nad formami barwnymi u mszycy zbożowej zaobserwowano 98 osobników brązowych i 24 zielone przy spodziewanym rozkładzie 3:1.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że rozkład w próbie jest zgodny z oczekiwanym.

Rozwiązanie. $f_o = 98$, $n = 98 + 24 = 122$. Prawdopodobieństwo sukcesu "tak" wynosi:

$$p^o = 3/(3 + 1) = 0.75$$

$$\chi^2 = \frac{(98-122*0.75)^2}{122*0.75(1 - 0.75)} = 1.85$$

$\chi^2 = 3.841$ przy $\alpha = 0.05$ i $\nu = k - 1 = 2 - 1 = 1$ stopniu swobody (tabl. 5). Ponieważ $\chi^2_\alpha = 3.841 >$ od $\chi^2=1.85$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Rozkład w próbie jest zgodny z założonym.

Uwaga 2. Jeżeli oczekiwana liczebność f_t w którejś z dwóch grup "tak" - "nie" nie przekracza 5 (niektórzy autorzy przyjmują 10) stosujemy wzór z poprawką:

$$\chi^2 = \frac{(|f_{o1} - f_{t1}| - 1/2)^2}{f_{t1}} + \frac{(|f_{o2} - f_{t2}| - 1/2)^2}{f_{t2}}$$

Wartość tą porównujemy z danymi tabelarycznymi przy $\nu = 1$ stopniu swobody.

Przykład 8. Każdej z 12 mszyc dano do wyboru 3 rośliny, z których jedna skażona została preparatem owadobójczym. Jedenaście mszyc wybrało rośliny nieskażone. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że mszyce wybierają roślinę do żerowania na drodze losowej.

Rozwiązanie.

$n = 12$, $f_{o1} = 1$, $f_{o2} = 11$

Liczebności oczekiwane wynoszą:

$f_{t1} = np = 12(1/3) = 4$ wybory rośliny z preparatem

$f_{t2} = n(1 - p) = 12(2/3) = 8$ wyborów rośliny bez preparatu.

$$\chi^2 = \frac{(1 - 4 - 0.5)^2}{4} + \frac{(11 - 8 - 0.5)^2}{8} = 2.3438$$

Ponieważ $\chi^2_\alpha = 3.841$ przy $\nu = 1$ stopniu swobody jest większe od $\chi^2 = 2.3438$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Mszyce nie posiadają (nie udowodniono, że posiadają) umiejętności odróżniania rośliny z trucizną.

Uwaga 3. Z reguły przeprowadza się więcej niż jedno doświadczenie. Jeżeli tych doświadczeń jest m wówczas dla każdego z nich obliczamy wartość χ^2 i wartości te sumujemy. Zsumowane wartości porównujemy z tabelaryczną przy ν = m stopniach swobody.

Przykład 9. W 10 próbach w doświadczeniach nad dziedziczeniem barw u mszycy zbożowej uzyskano następujące wyniki:

Liczba potomstwa	liczba osobników zielonych
122	98
149	110
86	68
55	42
71	54
179	141
150	120
91	70
53	39
111	85

Na poziomie istotności ξ = 0.05 zweryfikować hipotezę, że stosunek rasy brązowej do zielonej wynosi 1:3.

Rozwiązanie. Obliczamy wartości χ^2 korzystając z wzoru przedstawionego w przykładzie 7 dla każdej próby oddzielnie.

Dla próby pierwszej n = 122, f_o= 98, p_o= 3/(3 + 1) = 0.75, χ_1^2= 1.847

Dla pozostalych prób:
χ_2^2 = 0.020, χ_3^2 = 0.760, χ_4^2 = 0.055, χ_5^2 = 0.042, χ_6^2 = 1.358, χ_7^2 = 1.358,

χ_8^2 = 0.179, χ_9^2 = 0.057, χ_{10}^2 = 0.147

Obliczone wartości sumujemy:
χ^2 = 1.847 + 0.020 + 0.760 + 0.055 + 0.042 + 1.358 + 2.000 + 0.179 + 0.057 + 0.147 = 6.465

Dla każdej próby χ_α^2 = 3.841 przy α = 0.05 i ν = 1 stopniu swobody jest większe od χ^2. Nie ma postaw do odrzucenia hipotezy dla żadnej z 10 prób.

Z tabl. 5 odczytujemy χ^2_α = 18.2307 przy ν = m = 10 stopniach swobody i α = 0.05. Ponieważ χ^2 = 6.465 < χ^2_α = 18.307 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Wyniki doświadczenia są zgodne z hipotezą.

Oblicznie możemy tex przeprowadzić dla danych zsumowanych: n = 1067, f_o = 827 a więc

$$\chi^2 = \frac{(827 - 1067*0.75)^2}{1103*0.75*0.25} = 3.460$$

χ^2_α = 3.841 dla ν = 1 stopnia sowbody i przy α = 0.05. Ponieważ χ^2_α = 3.841 > χ^2 = 3.460 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza poprzedni wniosek.

2. 2. 2. Test zgodności χ^2 przy niewyszczególnionych parametrach rozkładu

Jeżeli wartości parametróew rozkładu cechy są niewyszczególnione wówczas rozkład szacujemy na podstawie próby.

Test ten pozwala sprawdzić czy populacja ma określony typ rozkładu czy nie, przy czym może on być skokowy lub ciągły. Dla każdej klasy z rozkładu zakładanego (np. normalnego) obliczamy liczebności teoretyczne, a następnie porównujemy je z empirycznymi przy użyciu statystyki χ^2 (tzn. statystyka, której używa się do weryfikacji hipotezy o zgodności rozkładów dwóch populacji ma rozkład asymptotyczny χ^2).

Używamy wzoru:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_o - f_t^*)^2}{f_t^*}$$

gdzie f_o oznacza liczebność z próby, f_t^* - liczebności oczekiwane oszacowane na podstawie próby, a r - oznacza liczbę klas wyników..

Wartość krytyczną χ^2_α odczytujemy z tablicy przy zakładanym poziomie istotności α i dla ν = r - 1 - k stopni swobody (k jest liczbą parametrów rozkładu oszacowanych na podstawie niezbędnych do wyznaczenia f_t^*).

Jeżeli $\chi^2_\alpha \geq \chi^2$ hipotezę o zgodności rozkładów odrzucamy. Jeżeli $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Przykład 10. (rozkład normalny)

Z populacji generalnej pobrano niezależnie próbę 200 chrząszczy (n = 200) i wykonano pomiary długości ich ciała. Wyniki te zestawiono w następującej tabeli:

klasa długości ciała	liczba okazów
1.0 - 1.4	15
1.4 - 1.8	45
1.8 - 2.2	70
2.2 - 2.6	50
2.6 - 3.0	20
razem	200

Liczba klas r = 5. Na poziomie istotności α = 0.05 należy zwryfikować hipotezę, że rozkład długości ciała jest rozkładem normalnym.

Rozwiązanie. Ponieważ nie znamy parametrów rozkładu musimy je oszacować na podstawie próby. Z rozkładu normalnego obliczamy dla każdej z r = 5 klas wartości badanej cechy x (długość ciała) prawdopodobieństwa p_i, że zmienna losowa x o rozkładzie normalnym przyjmie wartości należące do klasy o numerze i (i = 1, 2, ..., r). Prawdopodobieństo p_i pomnożone przez n daje liczebność teoretyczną f_t^*, która wystąpiłaby w klasie i jeżeli populacja ma rozkład normalny, tzn. jeżeli prawdziwa jest hipoteza zerowa. Znając liczebności f_o i f_t^* wyznaczamy wartość statystyki określonej wyżej podanym wzorem, gdzie $f_t^* = np_i$.

Z próby obliczamy dwa parametry rozkładu tj. średnią $\bar{x}$ i odchylenie standartowe s:

$$\bar{x} = 1/n\sum_{i=1}^{r}\mathring{x}_i f_o \qquad s = \sqrt{1/n\sum_{i=1}^{r}(\mathring{x}_i - \bar{x})^2 f_o}$$

gdzie $\mathring{x}_i$ oznacza środek przedziału klasowego, a n_i - liczebność przedziału. Wzory te mają zastosowanie przy dużej liczebności próby.

Obliczenia najprościej jest wykonać w tabeli:

x_i	f_o	$\mathring{x}_i$	$\mathring{x}_i f_o$	$(\mathring{x}_i - \bar{x})^2$	$(\mathring{x}_i - \bar{x})^2 f_o$
1.0 - 1.4	15	1.2	18	0.64	9.60
1.4 - 1.8	45	1.6	72	0.16	7.20
1.8 - 2.2	70	2.0	140	0.00	0.00
2.2 - 2.6	50	2.4	120	0.16	8.00
2.6 - 2.8	20	2.8	56	0.64	12.80

$$\bar{x} = 1/200*406 = 2.03 \cong 2.00 \qquad s = \sqrt{1/200*37.6} = \sqrt{0.188}$$

Ponieważ liczba przedziałów jest mała więc długość przedziału h jest duża (h = 0.4). Stosujemy więć poprawkę na grupowanie (patrz przypisek do przykładu 2) odejmując od wartości pod pierwiastkiem wartość $1/12h^2$:

$$s = \sqrt{0.188 - 1/12(0.4)^2} \cong 0.42$$

W ten sposób mamy obliczone dwa parametry rozkładu: średnią i odchylenie standartowe.

Następnie obliczamy kolejno:

$$z = \frac{(x_{i_o} - \bar{x})}{s}$$

czyli wartość standaryzowaną prawego końca przedziału klasowego, ø(z) - wartość dystrybuanty rozkładu N(0,1) w punkcie z oraz opisane wartości:

$$p_i,\ np_i = f_t^*,\ (n_i - f_t^*)^2,\ \frac{(n_i - f_t^*)^2}{f_t^*}$$

Obliczenia wykonujemy w tabeli:

x_i	f_o	$\frac{(x_i - \bar{x})}{s}$	ø(z)	p_i
1.4	15	-1.43*	0.076	0.076
1.8	45	-0.48	0.316	0.240
2.2	70	0.48	0.684	0.368
2.6	50	1.43	0.924	0.240
3.0	20	-	-	0.076
	200			1.000

* wartość -1.43 = (1.4-2.0)/0.42

ø(z) odczytujemy z tablicy 2 (dystrybuanta rozkładu normalnego) dla odpowiednich wartości z.

Prawdopodobieństwa p_i obliczamy kolejno:

$p_1 = ø(z_1) = 0.076$, $p_2 = ø(z_2) - ø(z_1) = 0.240$, $p_3 = ø(z_3) - ø(z_2) = 0.368$,

$p_4 = ø(z_4) - ø(z_3) = 0.240$, $p_5 = 1 - ø(z_4) = 0.076$,

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$

Następnie każde z prawdopodobienstw mnożymy przez n = 200 i uzyskujemy f_t^*. Wartość tę odejmujemy od f_o, podnosimy do kwadratu i dzielimy przez f_t^*. Wartości dla każdej grupy sumujemy.

Wyniki zestawiamy w tabelce:

f_t^*	$(f_o - f_t^*)^2$	$\frac{(f_o - f_t^*)^2}{f_t^*}$
16.4	1.96	0.12
48.2	10.24	0.21
70.8	0.64	0.01
48.2	3.24	0.07
16.4	12.96	0.79
	χ^2 =	1.20

W tabl. 5 znajdujemy wartość krytyczną χ^2_α = 5.9991 dla r- 1 - k = 5 - 1 - 2 = 2 stopni swobody (k = 2) gdyż z próby oszacowaliśmy 2 parametry: średnią i odchylenie standartowe). Ponieważ $\chi^2_\alpha = 5.991 > \chi^2 = 1.20$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że rozkład w próbie jest normalny.

Przykład 11. (Rozkład Poissona). W 400 losowo pobranych przesiewkach zaobserwowano od 0 do 6 gatunków owadów. Uzyskano nastęujące wyniki:

liczba gatunków w próbie	liczba przesiewek
0	105
1	141
2	96
3	44
4	8
5	4
6	2
n =	400

Na poziomie istotności α = 0.1 zweryfikować hipotezę, że rozkład liczby gatunków jest rozkładem Poissona.

Rozwiązanie. Rozkład Poissona jest wyrażony wzorem:

$$P_y = \frac{e^{-z} z^y}{y!}$$

gdzie:
y - oznacza liczbę gatunków owadów,
P_y - prawdopodobieństwo, że liczba gatunków wynosi y,
e - jest podstawą logarytmów naturalnych.

Ponieważ wartość z nie jest znana, wartość oczekiwaną f_t^* obliczamy z wzoru:

$$f_t^* = nP_y^*$$

gdzie:

$$P_y^* = \frac{e^{-\bar{x}} x^{-y}}{y!}$$

gdzie:
$\bar{x}$ oznacza średnią w próbie:

$$\bar{x} = \frac{0*10 + 1*143 + \ldots + 6*2}{400} = \frac{529}{400} = 1.3225$$

Znając średnią obliczamy kolejno:

$$P_o^* = \frac{e^{-1.3225}(1.3225)^0}{1} = 0.2665$$

$$P_1^* = \frac{e^{-1.3225}(1.3225)^1}{1*1} = 0.3524$$

$$P_2^* = \frac{e^{-1.3225}(1.3225)^2}{1*2} = 0.2331$$

$$P_3^* = \frac{e^{-1.3225}(1.3225)^3}{1*2*3} = 0.1027$$

$$P_4^* = \frac{e^{-1.3225}(1.3225)^4}{1*2*3*4} = 0.0340$$

$$p_5^* = \frac{e^{-1.3225}(1.3225)^5}{1*2*3*4*5} = 0.0090$$

$$P_6^* = \frac{e^{-1.3225}(1.3225)^6}{1*2*3*4*5*6} = 0.0020$$

Obliczamy liczebności oczekiwane z wzoru:

$$f_t^* = nP_y^*$$

oraz:

f_o	f_t^*	$(f_o - f_t^*)^2$	$\frac{(f_o - f_t^*)^2}{f_t^*}$
105	106	1	0.0094
141	141	0	0.0000
96	93	9	0.0968
44	41	9	0.2195
14	19	25	1.3158
400		χ^2 =	1.6415

Z tabl. 5 odczytujemy wartość $\chi^2_{\alpha_1}$ =0.352 przy P = 1 - 1/2α = 0.950 oraz $\chi^2_{\alpha_2}$ = 7.815 przy 1/2 α = 0.05 dla ν = r - 1 - k = 5 - 1 - 1 = 3 stopniach swobody (r = 5, gdyż trzy ostatnie wyniki zsumowano uzyskując 5 grup, k = 1, gdyż oszacowano na podstawie próby jeden parametr, czyli średnią). Ponieważ χ^2 = 1.6415 mieści się w granicach przedziału wyznaczonego przez wartości $\chi^2_{\alpha_1}$ i $\chi^2_{\alpha_2}$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotez, że rozkład liczby gatunków jest rozkładem Poissona.

Piśmiennictwo: Greń, 1978, Oktaba 1977, Puchalski 1980.

3. TESTY ZGODNOŚCI ROZKŁADU DWÓCH PRÓB NIEZALEŻNYCH

3. 1. Test sumy rang Manna-Whitneya/Wilcoxona

Test służy do badania zgodności dwóch rozkładów empirycznych. Pobieramy próby losowe o liczebnościach n_1 i n_2. Wyniki z obu prób łącznie szeregujemy od najmniejszej do największej i numerujemy kolejno. Potem obliczmy sumę numerów (rang) T dla próby o mniejszej liczebności. Zakładamy hipotezę, że nie ma różnicy między rozkładami. W takim przypadku $T_1/T_2 = n_1/n_2$. W celu sprawdzenia hipotezy porównujemy otrzymaną sumę kolejności mniejszej próby z wartością tabelaryczną $T\alpha$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Przykład 12. Zebrano mszyce należące do jednego gatunku z brzóz w dwóch parkach narodowych. Zmierzono długość czułków uzyskując następujące wyniki:

Park A: 62, 63, 59, 54, 65, 60, 62, 57,

Park B: 53, 58, 61, 62, 67, 57, 56, 58, 61, 63.

Przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że długość czułków u mszyc jest jednakowa w obu parkach.

Rozwiązanie. Dane porządkujemy według wartości rosnących, zaznaczając z której próby pochodzą i nadajemy im kolejne numery (rangi):

52	53	54	56	57	58	58	59	60	61	61	62	62
B	B	A	B	A	B	B	A	A	B	B	A	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	13

62	63	63	65	67
B	A	B	A	B
13	15.5	15.5	17	18

Dwie jednakowe wartości 58 mają numery kolejne ponieważ pochodzą z jednej próby. Dwie jednakowe wartości 63 mają rangę $\frac{15 + 16}{2}$ ponieważ pochodzą z dwóch różnych prób. Suma kolejności T_m mniejszej próby (park A) wynosi 83.5, a suma większej próby T_w wynosi 87.5. Suma $T_m + T_w = 171$. Sprawdzamy poprawność obliczenia sumy rang:

$$\frac{n(n\ +1)}{2} = \frac{18(18\ +1)}{2} = 171$$

Z tab. 6 odczytujemy wartość $T_\alpha = 53$ dla $n_1 = 8$ i $n_2 = 10$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Ponieważ $T_\alpha = 53 < T = 83.5$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Uwaga 1. Czasami wartości mniejszej próby są skupione na końcu szeregu. Wówczas obliczamy wartość $T' = n_1(n_1 + n_2 + 1) - T$ i porónujemy z wartością T_α.

Uwaga 2. Jeżeli liczebność próby jest większa niż 20 wówczas obliczamy wartość:

$$z = \frac{2T - n_1(n_1 + n_2 + 1)}{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1) : 3}$$

Wzór ten można również zastosować do prób o mniejszej liczebności. Dla powyższego przykładu wartość z = 0.0296. Jeżeli wartość z_α odczytana z tab. 2 jest mniejsza lub równa wartości obliczonej - hipotezę zerową odrzucamy, a jeżeli z_α < z nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Ponieważ $z_\alpha = 1.64$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ jest większe od z = 0.0296 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza poprzedni wniosek. Długość czułków jest jednakowa w obu parkach.

Piśmiennictwo: STEEL, TORIE, 1981; WILCOXON, 1945; PUCHALSKI, 1980; SIEGEL, 1956; NORCLIFFE, 1986; MANN, WHITNEY, 1947; WHITE, 1952.

3. 2. Test sumy rang W

Testu tego używamy dla porównania rozkładu 2 prób i ustalenia czy pochodzą z populacji o jednakowym rozkładzie.

Pierwszym krokiem w teście jest uporządkowanie danych według wartości rosnących i ponumerowanie kolejnymi numerami od początku i od końca szeregu. Przy parzystej liczbie prób numeracja zejdzie się w środku szeregu, a przy nieparzystej - środkowa wartość otrzyma największą rangę. Obliczamy sumy rang dla obu prób i porównujemy wynik z wartościaimi tabelarycznymi. Jeśli $W_{\alpha\,min} < W < W_{\alpha\,max}$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Przykład 13. Ustawiono 12 pułapek, w tym 7 na trawniku w parku, a 5 na trawniku przylegającym do głównej arterii komunikacyjnej miasta. Po 72 godzinach policzono znajdujące się w nich owady z rodziny biegaczowatych. Uzyskano następujące wyniki:

Trawnik A: 3, 6, 7 9, 16, 18, 19,

Trawnik B: 8, 11, 12, 13, 15.

Na poziomie istotności α = 0.05 zweryfikować hipotezę, że próby pochodzą z populacji o jednakowych rozkładach.

Rozwiązanie. Wyniki porządkujemy według wartoći rosnących i nadajemy im rangi:

A	A	A	B	A	B	B	B	B	A	A	A
3	6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19
1	2	3	4	5	6	6	5	4	3	2	1

Suma rang dla mniejszej próby wynosi:

$$W = 4 + 6 + 6 + 5 + 4 = 25.$$

Z tab. 7 odczytujemy dolną granicę $W_{\alpha_{min}} = 11$ przy $P = 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$ i górną granicę $W_{A_{max}} = 24$ przy $\alpha = 0.05$ dla prób o liczebnościach $n_1 = 7$ i $n_2 = 5$. Ponieważ $W = 25 > W_{\alpha_{max}} = 24$ hipotezę odrzucamy. Próby pochodzą z różnych populacji (liczebność biegaczy na obu trawnikach nie jest jednakowa).

Piśmiennictwo: PUCHALSKI, 1980; ANSARI, BRADLEY, 1960.

3. 3. Test serii

Z dwóch populacji o dowolnych rozkładach losujemy 2 próby: próbę A o liczebności n_1 i próbę B o liczebności n_2. Na podstawie wyników tych prób weryfikujemy hipotezę, że próby pochodzą z jednej populacji generalnej.

Wyniki obu prób ustawiamy w jeden ciąg rosnący oznaczając kolejne wartości odpowiednio literami A i B w zależności od tego z której próby pochodzą. Obliczamy liczbę serii u. Tworzymy lewostronny obszar krytyczny przy z góry założonym poziomie istotności. Jeżeli $u_\alpha \leq$ odrzucamy hipotezę, że rozkłady obu populacji są identyczne. Jeżeli $u > u_\alpha$ nie mamy podstaw do odrzucenia tej hipotezy.

Przykład 14. Z populacji owadów wybrano losowo po 15 osobników należących do 2 podgatunków. Zbadano liczbę zapłodnionych jaj składanych przez samicę w ciągu 1 dnia. Otrzymano następujące wyniki:

podgatunek A: 12, 20, 18, 7, 30,
32, 19, 28, 40, 27, 19, 10, 18, 20, 18,

podgatunek B: 15, 21, 17, 11, 50, 48, 32, 21, 17, 40, 36, 28, 15, 23, 14.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że różnica w ilości składanych jaj jest nieistotna.

Rozwiązanie. Tworzymy szereg liczbowy:

A	A	B	A	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	A	A
7	10	11	12	14	15	15	17	17	18	18	19	19	19	20	20

B	B	B	A	A	B	A	A	B	B	B	A	B	B
21	22	23	27	28	28	30	32	32	36	40	40	48	50

Liczba serii $u_\alpha = 12$, $n_1(A) = 15$, $n_2(B) = 15$. Przy $\alpha = 0.05$ odczytujemy $u_\alpha = 11$ (tab. 1). Ponieważ $u = 12 > u_\alpha = 11$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy przy założonym poziomie istotności.

Uwaga 1. Przy większej liczebności prób, gdy n_1 i n_2 są większe niż 20 można zastosować aproksymację rozkładem normalnym (patrz p. 1.).

Przykład 15. Na powierzchniach badawczych A i B pobrano czerpakiem po 12 prób i uzyskano następujące liczebności owadów:

powierzchnia A: 60, 70, 37, 43, 42, 68, 70, 70, 53, 59, 68, 72.

powierzchnia B: 30, 21, 71, 61, 36, 49, 69, 74, 44, 32, 48, 40.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że różnica w liczebności owadów na obu powierzchniach jest nieistotna.

Rozwiązanie. Tworzymy ciąg liczbowy:

21	30	32	36	37	40	42	43	44	48	49	53	59	60	61	68
B	B	B	B	A	B	A	A	B	B	B	AA	A	A	B	A

68	69	70	70	70	71	72	74
A	B	A	A	A	B	A	B

Liczba serii $u = 13$ $n_1(A) = 12$, $n_2(B) = 12$.

Z tabl. 1 odczytujemy $u_\alpha = 8$ przy $\xi = 0.05$. Ponieważ $u = 13 > u_\alpha = 8$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy.

Piśmiennictwo: Greń, 1978; Norcliffe, 1986, Siegel, 1956.

3. 4. Test λ Kołmogorova-Smirnova

Przy użyciu testu λ Kołmogorova-Smirnova można porównywać dwie dystrybuanty empiryczne (z próby). Przyjmuje się przy tym założenie, że rozkłady mają charakter ciągły. W innym przypadku stosuje się statystykę χ^2. W celu obliczenia statystyki λ

Kołmogorowa-Smirnova obliczamy dla obu dystrybuant liczebności empiryczne korzystając z wzorów:

$$Fn_1(x) = \frac{n_{1,sk}}{n_1} \qquad Fn_2(x) = \frac{n_{2,sk}}{n_2}$$

gdzie $n_{1,sk}$ i $n_{2,sk}$ oznaczają liczebności skumulowane w obu grupach. Następnie obliczamy bezwzględne różnice między wartościami tych dystrybuant $|Fn_1(x) - Fn_2(x)|$ po czym odszukujemy największą różnicę wartości tych dystrybuant:

$$D = \sup_x |Fn_1(x) - Fn_2(x)$$

Obliczamy: $$\lambda = D\sqrt{n}$$

gdzie $$n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

Statystyka λ ma asymptotyczny rozkład λ Kołmogorowa.

Przykład 16. Wylosowano dwie próby plastra z uli 2 gatunków pszczół. Pomiary wykazały następujące rozkłady średnicy tych komórek:

Średnica	Liczba komórek z ula pszczół gatunku A	Liczba komórek z ula pszczół gatunku B
5.0	2	0
5.1	4	3
5.2	5	6
5.3	8	10
5.4	14	14
5.5	12	18
5.6	8	16
5.7	5	14
5.8	2	12
5.9	-	7

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że u obu gatunków pszczół rozkłady średnic komórek w plastrach są takie same.

Rozwiązanie. Tworzymy tabelę:

$\overset{\circ}{x}_i$	$n_{1,sk}$	$n_{2,sk}$	$Fn_1(x)$	$Fn_{2,sk}$	$\lvert Fn_1(x) - Fn_2(x)\rvert$
5.0	2	0	0.0333	0.0000	0.0333
5.1	6	3	0.1000	0.0300	0.0700
5.2	11	9	0.1833	0.0900	0.0933
5.3	19	19	0.3167	0.1900	0.1267
5.4	33	33	0.5500	0.3300	0.2200
5.5	45	51	0.7500	0.5100	0.2400 = D
5.6	53	67	0.8833	0.6700	0.2133
5.7	58	81	0.9667	0.8100	0.1567
5.8	60	93	1.0000	0.9300	0.0700
5.9	60	100	1.0000	1.0000	0.0000

$$\lambda = 0.2400\sqrt{\frac{60 \times 100}{60 + 100}} = 1.4697$$

Z tab. 3 odczytujemy $\lambda_\alpha = 1.3581$. Ponieważ $\lambda = 1.4697 > \lambda_\alpha = 1.3581$ przy $\alpha = 0.05$ hipotezę odrzucamy. Średnice komórek w plastrach obu gatunków pszczół różnią się od siebie istotnie.

Przykład 17. Zbadano wielkość biegaczy pobranych losowo z dwoćh środowisk o różnym poziomie degradacji pod wpływem działalności człowieka i uzyskano następujące wyniki:

Długość ciała	Środowisko A	Środowisko B
30-32	5	3
32-34	10	10
34-36	25	15
36-38	30	28
38-40	18	30
40-42	12	20
42-44	7	18
44-46	5	6
46-48	3	2

Przy poziomie istotności $\alpha = 0.01$ należy zweryfikować hipotezę xe rozkłady wielkości biegaczy w obu środowiskach są identyczne.

Rozwiązanie. Tworzymy tabelę liczebności skumulowanych:

$\mathring{x}_{ig}$	$n_{1,sk}$	$n_{2,sk}$	$F_{n_1}(x)$	$F_{n_2}(x)$	$\lvert F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)\rvert$
32	5	3	0.0435	0.0227	0.0208
34	15	13	0.1304	0.0985	0.0319
36	40	28	0.3478	0.2121	0.1357
38	70	56	0.6087	0.4242	0.1845 = D
40	88	86	0.7652	0.6515	0.1137
42	100	106	0.8696	0.8030	0.0666
44	107	124	0.9304	0.9394	0.0090
46	112	130	0.9739	0.9848	0.0109
48	115	132	1.0000	1.0000	0.0000

$$\lambda = 0.1845\sqrt{\frac{115*132}{115+132}} = 1.4464$$

Ponieważ $\lambda = 1.4464 < \lambda_\alpha = 1.6276$ nie ma podstaw do odrzucenia postawionej hipotezy.

Uwaga 1. Zamiast używać wartości λ można porównywać wartości D z wartościami obliczonymi według następujących wzorów:

dla $\alpha = 0.05$ $\qquad D_\alpha = 1.3581\sqrt{\frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}$

dla $\alpha = 0.01$ $\qquad D_\alpha = 1.6276\sqrt{\frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}$

dla $\alpha = 0.005$ $\qquad D_\alpha = 1.73\sqrt{\frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}$

dl $\alpha = 0.0001$ $\qquad D_\alpha = 1.95\sqrt{\frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}$

Jeżeli $D < D_\alpha$ oba rozkłady są identyczne. Gdy $D \geq D_\alpha$ hipotezę o identyczności rozkładów odrzucamy.

Przykład 18. W przykładzie 16 D = 0.24000, n_1 = 60, n_2 = 100. $D_{0.05} = 1.3581\sqrt{\frac{60 + 100}{60 * 100}} = 0.2218$. Ponieważ D = 0.2400 > D_α = 0.2218 hipotezę odrzucamy.

Przykład 19. W przykładzie 17 D = 0.1845, n_1 = 115, n_2 = 132. $D_{0.01} = 1.6276\sqrt{\frac{115 + 132}{115 * 132}} = 0.2076$. Ponieważ D = 0.1845 < D_α = 0.2076 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. co potwierdza poprzedni wniosek.

Uwaga 2. Powyżej omawiany test jest testem dwustronnym dla dwóch prób. Czasami stosuje się test jednostronny dla dwóch prób. Test dwustronny dotyczy maksymalnej bezwzględnej różnicy pomiędzy wartośćaimi dystrybuant. Test jednostronny jest oparty na maksymalnej różnicy w określonym kierunku pomiędzy dwiema dystrybuantami:

$$D = \sup_x (Fn(x) - \hat{F}(x))$$

Kryterium dla testu jednostronnego jest statystyka χ^2. Mając obliczone D szacujemy:

$$\chi^2 = 4D^2 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2}}$$

i porównujemy z wartością χ^2_α (tabl. 5) dla ν = 2 stopni swobody.

Jeżeli $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$ hipotezę odrzucamy, a gdy $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Piśmiennictwo: Bielecki, Jurkiewicz, Szymanowska, 1978; Birbaum, Hall, 1960; Greń, 1978; Kołmogorov, 1933; Massey, 1951, 1952; Muller, 1956; Neave, 1981; Norcliffe, 1986; Smirnov, 1939, 1948.

3. 5. Test mediany

W tym teście sprawdzamy czy próby pochodzą z jednej populacji. Najpierw obliczamy liczbę wyników powyżej i poniżej mediany w obu grupach oddzielnie. Jeżeli próby pochodzą z jednej populacji wówczas liczba wyników powyżej i poniżej mediany powinna być podobna w obu próbkach. Liczebności zestawia się w tablicę 2 x 2 i oblicza wartość statystki χ^2 z 1 stopniem swobody. Rozkaład populacji może być dowolny.

Przykład 20. W grądzie i borze sosonowym pobrano po 15 próbek ściółki glebowej. Po wypłoszeniu zwierząt w aparacie Tullgrena zbadano biomasę owadów. Otrzymano następujące dane:

grąd: 20.1 18.6 26.2 33.1 30.0 27.3 21.5 23.9 25.1 28.4 29.2 34.8 30.3 27.1 26.0,

bór sosnowy: 26.4 24.8 30.9 33.6 32.5 29.6 27.8 36.7 34.9 36.9 34.3 33.8 29.7 30.1 26.1.

Przy $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że różnica w żyzności środowisk wyrażona biomasą owadów jest nieistotna.

Rozwiązanie. Tworzymy rosnący szereg liczbowy z wyników obu prób:

18.6	27.1	30.9
20.1	27.3	32.5
21.5	27.8	33.1
23.9	28.4	33.6
24.8	29.2	33.8
25.1	29.6	34.3
26.0	29.7	34.8
26.1	30.0	34.9
26.2	30.1	36.7
26.4	30.3	36.9

Obliczamy medianę:

$$Me = \frac{29.2 + 29.6}{2} = 29.4$$

Obliczamy liczbę wartości mniejszych i większych od mediany oddzielnie dla obu prób i zestawiamy w tablicę 2 x 2:

	grąd	bór	Razem
większe od mediany	4(a)	11(b)	15
mniejsze od mediany	11(c)	4(d)	15
Razem	15	15	30

Obliczamy wartość statystyki χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(ad - bc - 0.5n)^2 n}{(a + b)(a + c)(a + d)(c + d)}$$

Przy ν = 1 stopniu swobody i α = 0.05 odczytujemy wartość krytyczną χ^2_α = 3.84 (tab. 5).

Ponieważ $\chi^2 = 8.53 > \chi^2_\alpha = 3.84$ odrzucamy hipotezę o nieistotnej różnicy między środowiskami.

Przykład 21. Wybrano 20 larw 4-tego stadium mszyc z podgatunku A i 30 larw tego samego gatunku z podgatunku B. Po osiągnięciu dojrzałości zbadano ciężar pierwszej urodzonej larwy. Uzyskano następujące wyniki:

podgatunek A: 28, 30, 33, 25, 34, 27, 29, 29, 40, 32, 26, 29, 30, 32, 28, 45, 24, 47, 35, 25.

podgatunek B: 27, 30, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 38, 27, 39, 36, 37, 28, 40, 41, 38, 38, 43, 33, 34, 39, 22, 26, 32, 34, 34, 33, 26, 43.

Na poziomie istotności α = 0.05 zweryfikować hipotezę, że świeżo urodzone larwy obu gatunków mają jednakowy ciężar.

Rozwiązanie. Tworzymy rosnący szereg liczbowy z wyników obu prób:

22	28	32	35	40
24	28	32	36	40
25	28	33	36	40
25	29	33	37	41
26	29	33	38	42
26	29	34	38	43
26	30	34	38	43
27	30	34	38	44
27	30	34	39	45
27	32	34	39	47

Znajdujemy medianę:

$$Me = \frac{33 + 34}{2} = 33.5$$

Obliczamy liczbę wartości mniejszych i większych od mediany oddzielnie dla obu prób i zestawiamy w tablicę 2 x 2:

	podgatunek A	poodgatunek B	Razem
wartości większe od mediany	5 (a)	20 (b)	25
wartości mniejsze od mediany	15 (b)	10 (d)	25
Razem	20	30	50

Obliczamy wartość statystyki χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(50 - 300 - 25)^2 * 50}{25*20*30*25} = 10.0833$$

Ponieważ $\chi^2 = 10.08 > \chi_\alpha^2 = 3.84$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ (tabl. 5) hipotezę, że larwy obu podgatunków mają jednakowy cięża po urodzeniu - odrzucamy.

Piśmiennictwo: GREŃ, 1978; BIELECKI, JURKIEWICZ, SZYMANOWSKA, 1978; MOOD, 1950.

4. TESTY ZGODNOŚCI ROZKŁADU DWÓCH PRÓB SPAROWANYCH

4. 1. Test znaków

Test ten służy do porównywania dwóch szeregów, w których dane jednego szeregu tworzą pary z danymi drugiego szeregu. Rozkład populacji, z których pobrano próby jest obojętny. Zakładmay, że nie ma różnicy pomiędzy rozkładem danych pierwszej populacji i rozkładem danych drugiej populacji. Badamy znak różnicy $x_i - y_i$. Jeżeli x = y takiej pary nie bierzemy pod uwagę. Jeżeli dane pochodzą z jednej populacji liczba plusów powinna równoważyć liczbę minusów. Mniejszą z tych wartości porównujemy z tablicami. Jeżeli obliczone r jest mniejsze od r_α odrzucamy hipotezę przy założonym poziomie istotności α. Hipoteza ta może być zweryfikowana przy użyciu statystyki χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2}$$

gdzie n_1 i n_2 oznaczają liczbę plusów i minusów. Poprawka na ciągłość rozkładu może być wprowadzona przez zmianę licznika powyższego równania na:

$$(|n_1 - n_2| - 1)^2$$

Test znaków nie może być stosowany jeżeli liczba par jest mniejsza od 6.

Przykład 22. Zbadano ciężar 20 ryjkowców. Roślinę żywicielską opryskano 5% roztworem taniny i po 10 dniach ponownie zbadano ciężar poszczególnych osobników. Uzyskano następujące rezultaty:

nr ryjkowca	ciężar przed opryskiwaniem	ciężar po opryskiwaniu	znak różnicy
1	2.35	2.11	+
2	2.38	2.14	+
3	2.65	2.	-
4	2.42	2.40	+
5	2.43	2.15	+
6	2.51	2.54	-
7	2.58	2.36	+
8	2.59	2.09	+
9	2.45	2.19	+
10	2.73	2.62	+
11	2.61	2.68	-
12	2.61	2.53	+
13	2.41	2.58	-
14	2.45	2.37	+
15	2.65	2.54	+
16	2.37	2.42	-
17	2.76	2.65	+
18	2.51	2.71	-
19	2.46	2.21	+
20	2.61	2.32	+

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że ciężar ryjkowców nie zmienia się pod wpływem taniny.

Rozwiązanie. Łącznie stwierdzono 14 plusów i 6 minusów, czyli $r = 6$, $n = 20$. Z tab. 8 przy $\alpha = 0.05$ odczytujemy $r_\alpha = 5$. Ponieważ $r = 6 > r_\alpha = 5$ nie możemy odrzucić hipotezy o jednakowym ciężarze przed i po opryskiwaniu.

Dla tego przykładu

$$\chi^2 = \frac{(14 - 6)^2}{14 + 6} = 3.2$$

Ponieważ $\chi^2 = 3.2 < \chi^2 = 3.84$ odczytanego z tab. 5 przy $\nu = 1$ stopniu swobody i $\alpha = 0.05$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza wcześniejsze wyliczenie.

Piśmiennictwo: DIXON, MASSEY, 1969; STEEL, TORIE, 1981.

4. 2. Test rangowanych znaków Wicoxona

Test ten jest podobny do testu znaków, jednak oprócz znaków różnicy wyników tworzących parę uwzględnia również wielkość tej różnicy. Zakłada się, że rozkład populacji jest ciągły. Testuje się hipotezę, że dwie próby pochodzą z jednej populacji.

Obliczamy różnice wyników obu prób dla wszystkich par, porządkujemy wartości bezwzględne tych różnic od najmniejszej do największej, oznaczając je (rangując) kolejnymi numerami. Numery (rangi) zapisujemy w 2 grupach oddzielnie dla różnic dodatnich oraz ujemnych. Sumując je uzyskujemy sumę T^+ dla różnic dodatnich i T^- dla różnic ujemnych. Mniejsza z tych różnic jest statystyką T o rozkładzie podanym w tablicach, przy założeniu prawdziwości hipotezy.

Jeśli $T \le T_\alpha$ przy założonym poziomie istotności α hipotezę odrzucamy. Jeśli $T > T_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Jeśli występuje kilka jednakowych różnic nadajemy im wszystkim jednakowy numer będący średnią arytmetyczną numerów, które by miały gdyby nie były jednakowe.

Gdy $n > 25$ można korzystać z granicznego rozkładu normalnego, gdyż statystyka T ma rozkład:

$$z = \frac{(T - \mu_T)}{\sigma_T}$$

gdzie: $\mu_T = \frac{n(n + 1)}{4}$ $\sigma_T = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{24}$

a n oznacza liczbę par. w tym przypadku do testowania hipotezy używamy tabl. 2.

Przykład 23. Zbadano wydajność 14 znakowanych pszczół przed i po opryskiwaniu plantacji herbicydami. Uzyskano następujące wyniki:

przed opryskiwaniem: 52, 220, 125, 84, 150, 92, 94, 125, 78, 265, 187, 113, 63, 146.

po opryskiwaniu: 68, 242, 120, 107, 159, 80, 115, 162, 90, 241, 197, 101, 85, 180.

Na poziomie istotności α = 0.05 zweryfikować hipotezę, że wydajność pszczół przed i po opryskiwaniu jest taka sama.

Rozwiązanie. Obliczamy różnice i nadajemy im rangi:

$x_i - y_i$	T_i^+	T_i^-
16	7	
22	9.5	
-5		1
23	11	
9	2	
-12		5
21	8	
37	14	
12	5	
-24		12
10	3	
-12		5
22	9.5	
34	13	
	82	23

$T^+ = 82$, $T^- = 23$. Liczba mniejsza jest szukaną wartością T. Sprawdzamy poprawność obliczeń:

$$T^+ + T^- = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{14 \times 15}{2} = 105$$

gdzie n oznacza liczbę par. Przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i $n = 14$ $T_\alpha = 21$ (tab. 9). Ponieważ $T = 23 > T_\alpha = 21$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że wydajność pszczół jest taka sama przed i po opryskiwaniu.

Piśmiennictwo: STEEL, TORIE, 1981; GREŃ 1978; NEAVE, 1981; WILCOXON, 1945, 1947, 1949.

5. 1. Test sumy rang Kruskala-Wallisa (dla nierównych prób)

Testu używa się dla populacji o rozkładach ciągłych. Wszystkie wartości uzyskane w próbach ustawia się według kolejności od najmniejszej do największej i nadaje im kolejne numery (rangi). Następnie sumujemy rangi dla każdej próby oddzielnie. jeśli próby pochodzą z 1 populacji to sumy rang dla poszczególnych prób powinny być podobne.

Test ten może być używany dla dwóch prób. W takim przypadku używamy tab. 6 niezależnie od liczebności próby. Najczęściej test ten jest używany do porównywania kilku prób. W przypadku porównywania 3 - 5 prób o niewielkich liczebnościach korzystamy z tab. 10. W przypadku porównywania co najmniej 3 prób o dużej liczebności statystyka H użyta do budowy obszaru krytycznego ma rozkład graniczy χ^2 z $\nu = k - 1$ stopniami swobody, gdzie k oznacza liczbę porównywanych prób. Gdy liczebność prób jest duża można z rozkładu χ^2 wyznaczyć prawostronny obszar krytyczny dla testu. Weryfikujemy hipotezę, że wszystkie badane próby pochodzą z jednej populacji. Aby ją zweryfikować wyznaczamy wartość statystyki:

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i \le 1} \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

gdzie n oznacza łączną liczebność w próbach, T_i oznacza sumę rang dla próby (i = 1, 2, ..., k), a n_i - liczebność próby. Z tab. 5 dla $\alpha = 0.05$ i $\nu = k - 1$ stopni swobody odczytujemy wartość statystyki χ^2_α. Jeżeli $\chi^2 \ge \chi^2_\alpha$ hipotezę odrzucamu, a jeżeli $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ wówczas nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Przykład 24. Z trzech środowisk wybrano odpowiednio 10, 8 i 12 żuków i zmierzono długość fali świetlnej odbitej od ich pokryw. Otrzymano następujące wyniki:

środowisko A: 420, 560, 600, 490, 550, 570, 340, 480, 510, 460,

środowisko B: 400, 420, 580, 470, 470, 500, 520, 530,

środowisko C: 450, 700, 630, 590, 420, 590, 610, 540, 740, 690, 540, 670.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że długość fali odbitego światła we wszystkich środowiskach jest jednakowa.

Rozwiązanie. Ogólna liczebność $n = n_1 + n_2 + n_3 = 30$. Wynikom nadajemy rangi od 1 do 30 i sumujemy rangi oddzielnie dla każdego środowiska otrzymując T_1, T_2, i T_3:

A	ranga	B	ranga	C	ranga
420	4	400	2	450	6
560	19	420	4	700	29
600	24	580	21	630	26
490	11	470	8.5	590	22.5
550	18	470	8.5	420	4
570	20	500	12	590	22.5
340	1	520	14	610	25
480	10	530	15	540	16.5
510	13			740	30
460	7			690	28
				540	16.5
				670	27

$T_1 = 127$ $T_2 = 85$, $T_3 = 253$

Sprawdzamy poprawność obliczenia:

$$T_1 + T_2 + T_3 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{31 \times 31}{2} = 465$$

Obliczamy wartość statystyki:

$$H = \frac{12}{30 \times 31} \left(\frac{127^2}{10} + \frac{85^2}{8} + \frac{253^2}{12} \right) - 3 \times 31 = 8.2917$$

Z tabl. 5 odcztujemy wartość $\chi^2_\alpha = 5.991$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i $\nu = k - 1 = 2$ stopniach swobody. Ponieważ $\chi^2 = 8.2917 > \chi^2_\alpha = 5.991$ hipotezę odrzucamy. Długość fali światła odbitej od pokryw nie jest jednakowa w badanych środowiskach.

Przykład 25. Wybrano próbkę mszyc składającą się z 42 osobników. Mszyce opryskiwano 4 różnymi preparatami owadobójczymi. Badano długość życia mszyc po opryskiwaniu. Otrzymano następujące wyniki:

Preparat A	Praparat B	Preparat C	Preparat D
10	8	8	18
11	12	3	17
12	12	4	16
12	12	9	12
14	16	12	18
8	9	6	17
6	3	7	15
9	7	7	8
10	15	9	10
	16	5	7
	15	6	
		10	

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że cztery preparaty mają jednakową szybkość działania.

Rozwiązanie. Dane numerujemy zaczynając od najmniejszej liczby:

Preparat A		Preparat B		Preparat C		Preparat D	
Dane	Ranga	Dane	Ranga	Dane	Ranga	Dane	Ranga
10	21.5	8	13.5	8	13.5	18	41
11	24	12	27.5	3	1.5	17	40
12	27.5	12	27.5	4	3	16	37
12	27.5	13	31	9	17.5	12	27.5
14	32	16	37	12	27.5	18	42
8	13.5	9	17.5	6	6	17	39
6	6	3	1.5	7	9.5	15	34
6	17.5	7	9.5	7	9.5	8	13.5
10	21.5	15	34	9	17.5	10	21.5
		16	37	5	4	7	9.5
		15	34	6	6		
				10	21.5		

$$n_1 = 9,\ n_2 = 11,\ n_3 = 12,\ n_4 = 10.$$

$$T_1 = 191,\ T_2 = 270,\ T_3 = 137,\ T_4 = 305$$

Sprawdzamy poprawność obliczenia sumy rang:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 903 = \frac{42*43}{2}$$

Wyznaczamy wartość statystyki H:

$$H = \frac{12}{42(42 + 1)}\left(\frac{191^2}{9} + \frac{270^2}{11} + \frac{137^2}{12} + \frac{305^2}{12}\right) - 3(42 + 1) =$$

14.1714.

Z tabl. 5 odczytujemy wartość krytyczną $\chi^2_\alpha = 7.815$ dla $\nu = k - 1 = 4 - 1 = 3$ stopni swobody przy $\alpha = 0.05$. Ponieważ $\chi^2 = 14.1714 > \chi^2_\alpha = 7.815$ hipotezę o jednakowej skuteczności preparatów odrzucamy.

Piśmiennictwo: STEEL, TORIE, 1981; NEAVE, 1981, GREŃ, 1978, PUCHALSKI, 1980; KRUSKAL, WALLLIS 1952.

5. 2. Test sumy rang W (dla tablicy r x k)

Test ten stosujemy dla więcej niż dwóch prób, gdy wyniki są uporządkowane według dwóch kryteriów w r rzędach i k kolumnach. Weryfikujemy dwie hipotezy: A - zakładającą, że próby uporządkowane według rzędów pochodzą z populacji o jednakowych rozkładach oraz B - zakładającą, że próby uporządkowane według kolumn pochodzą z populacji o jednakowych rozkładach.

Weryfikacja hipotezy A. Numerujemy kolejno dane w każdej z kolumn według wartości rosnących i sumujemy numery rzędami. Jeżeli hipoteza jest prawdziwa wówczas suma numerów w każdym rzędzie jest podobna. Obliczamy

$$W = \frac{12\Sigma d^2}{k^2(r^3 - r)}$$

gdzie d oznacza różnicę między sumą numerów w rzędzie a wartością teoretyczną tej sumy, którą obliczamy ze wzoru:

$$\frac{k(r + 1)}{2}$$

gdzie k - oznacza liczbę kolumn, a r - liczbę rzędów.

Weryfikacja hipotezy B. Numerujemy kolejno dane w każdym z rzędów i sumujemy rangi kolumnami, a następnie obliczamy W:

$$W = \frac{12\Sigma d^2}{r^2(k^3 - k)}$$

gdzie d oznacza różnicę między sumą numerów w kolumnie, a wartością teoretyczną tej sumy obliczoną z wzoru:

$$\frac{r(k + 1)}{2}$$

Wyniki obliczeń porównujemy z wartością tabelaryczną W_α przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ (tab. 11). Jeżeli $W < W_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Jeżeli $W \geq W_\alpha$ hipotezę odrzucamy.

Jeżeli mamy więcej k lub r niż podano w tab. 11 możemy skorzystać z testu:

$$\chi^2 = Wr(k - 1) \text{ - dla kolumn i}$$

$$\chi^2 = Wk(r - 1) \text{ - dla rzędów}$$

Przykład 26. Mszyce z gatunku polifagicznego zebrano z 6 gatunków traw rosnących w 5 różnych środowiskach. Wyniki pomiarów długości ogonka zebrano w tabeli (każdy wynik jest średnią 10 pomiarów):

Gatunek trawy	Środowisko				
	A	B	C	D	E
a	19.9	15.0	18.1	14.6	16.6
b	18.5	16.1	16.7	14.8	15.5
c	18.0	18.3	17.1	17.8	13.3
d	17.9	15.8	15.4	17.7	16.1
e	14.6	15.3	18.0	13.7	15.8
f	18.2	16.8	17.3	18.3	16.7

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezy: A - zakładającą, że mszyce na różnych gatunkach trawy mają jednakową długość ogonka, B - zakładającą, że mszyce w różnych środowiskach mają jednakową długość ogonka.

Rozwiązanie. Weryfikacja hipotezy A. Numerujemy kolejno wartości każdej z kolumn i sumujemy numery rzędami:

	A	B	C	D	E	Suma
a	6	1	6	2	5	20
b	5	4	2	3	2	16
c	3	6	3	5	1	18
d	2	3	1	4	4	14
e	1	2	5	1	3	12
f	4	5	4	6	6	25
			Suma		105	

Sprawdzamy sumowanie:

$$k\frac{r(r+1)}{2} = 5\frac{6(6+1)}{2} = 105$$

Obliczamy wartość teoretyczną sumy w rzędzie:

$$k\frac{r+1}{2} = \frac{5 \times 7}{2} = 17.5$$

Obliczamy: $\Sigma d^2 = (20 - 17.5)^2 + (16 - 17.5)^2 + (18 - 17.5)^2 + (14 - 17.5)^2 + (12-17.5)^2 + (25 - 17.5)^2 = 107.5$

Obliczamy W:

$$W = \frac{12 \times 107.5}{25(6^3 - 6)} = 0.246$$

Z tabl. 11 odczytujemy wartość $W_\alpha = 0.41$ przy poziomie istotności 0.05 dla $r = n = 6$ i $k = m = 5$. Ponieważ $W = 0.246 < W_\alpha = 0.41$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy A, że długość ogonka mszyc na różnych gatunkach traw jest jednakowa.

Weryfikacja hipotezy B. Numerujemy kolejno wartości w każdym rzędzie i sumujemy nr kolumnami:

A	B	C	D	E	Suma
a	5	2	4	1	3
b	5	3	4	1	2
c	4	5	2	3	1
d	5	2	1	4	3
e	2	3	5	1	4
f	4	2	3	5	1
Suma 25	17	19	15	14	90

Sprawdzamy sumowanie:

$$r\frac{k(k + 1)}{2} = 6\frac{5(5 + 1)}{2} = 90$$

Obliczamy wartość teoretyczną sumy numerów w kolumnie:

$$r\frac{(k + 1)}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$

Obliczamy $\Sigma d^2 = (25 - 18)^2 + (17 - 18)^2 + (19 - 18)^2 + (15 - 18)^2 + (14 - 18)^2 = 76$

Obliczamy W:

$$W = \frac{12 \times 76}{6^2(5^3 - 5)} = 0.211$$

Z tab. 11 odczytujemy wartość $W_\alpha = 0.37$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i $r = m = 6$ i $k = n = 5$. Ponieważ $W = 0.211 < W_\alpha = 0.37$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy B, że długość ogonka mszyc jest jednakowa w badanych środowiskach.

Weryfikacja hipotez A i B przy użyciu testu χ^2.

Hipoteza A:

$$\chi^2 = Wk(r - 1) = 0.246 \times 5(6 - 1) = 6.15$$

$\chi^2_\alpha = 11.070$ przy $\alpha = 0.05$ i $\nu = r - 1 = 6 - 5 = 1$ stopniu swobody (tab. 5). Ponieważ $\chi^2 = 6.15 < \chi^2_\alpha = 11.070$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza poprzednie obliczenie.

Hipoteza B:

$$\chi^2 = Wr(k - 1) = 0.211 \times 6(5 - 1) = 5.064$$

$\chi^2_\alpha = 9.488$ przy $\alpha = 0.05$ i $\nu = k - 1 = 5 - 1 = 4$ stopniach swobody (tab. 5). Ponieważ $\chi^2 = 5.064 < \chi^2_\alpha = 9.488$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza poprzednie obliczenie.

Piśmiennictwo: ANSARI, BRADLEY, 1960; PUCHALSKI, 1980;

5. 3. Testy mediany

5. 3. 1. Test mediany (1)

Hipotezę A w przykładzie 26 możemy zweryfikować przy użyciu testu mediany. W tym celu w każdej kolumnie znajdujemy medianę i obliczamy liczbę obserwacji mniejszych i większych od mediany. Tworzymy tabelę 2 x k, gdzie k oznacza liczbę kolumn.

Wyniki weryfikujemy przy pomocy testu χ^2 jak opisano w rozdzile 7.2.

Piśmiennictwo: MOOD, 1950.

5. 3. 2. Test mediany (2)

Test mediany może być użytz dla k niezależnych prób. Obliczamy medianę dla wszystkich prób łącznie. Znajdujemy liczbę obserwacji większych i mniejszych od mediany w każdej próbie. Następnie tworzymy tabelę 2 x k i obliczamy statystykę χ^2 z $\nu = k - 1$ stopniami swobody. Sposób wykonywania obliczeń dla tabeli 2 x k został opisany w rozdzile 7.2.

Piśmiennictwo: STEEL, TORRIE, 1981.

5. 4. Test Friedmana (dla tablicy r x k)

Test służy do porównywania więcej niż 2 prób, gdy wyniki są uporządkowane według 1 kryterium w k kolumnach o n powtórzeniach lub gdy są uporządkowane według 2 kryteriów w tablicy r x k.

Używamy statystyki S:

$$S = \frac{12}{rk(k + 1)} \Sigma d_i^2 - 3r(k + 1)$$

gdzie r oznacza liczbę rzędów lub powtórzeń, k - liczbę kolumn,

Σd_i^2 jest sumą kwadratów sum rang z każdej kolumny. Statystyka S ma rozkład graniczny χ^2, przy $\nu = k - 1$ stopni swobody.

Przykład 27. Wykonamy obliczenia dla przykładu 26.

Dla hipotezy A:

$$\chi^2 = \frac{12}{5 \times 6 \times 7}\left(20^2 + 16^2 + \ldots + 25^2\right) - 3 \times 5 \times 7 = 6.1429$$

co jest zgodne z poprzednim wyliczeniem.

Dla hipotezy B:

$$\chi^2 = \frac{12}{6 \times 5 \times 6}\left(25^2 + \ldots + 14^2\right) - 3 \times 6 \times 6 = 5.0667$$

co jest zgodne z wcześniej uzyskaną wartością.

Piśmiennictwo: Steel, Torie, 1981; Friedman, 1937

VI. TEST ISTOTNOŚCI RÓŻNIC DLA KILKU PRÓB

Test ten przeprowadza się w następujący sposób. W każdej kolumnie wyznaczamy wartość maksymalną, nastę pnie numerujemy próby kolejno według wartości maksymalnych od najwyższej do najniższej. Następnie porównujemy obserwację o najwyższej wartości maksymalnej z obserwacją o najniższej wartości maksymalnej, zaliczając liczbę obserwacji w próbie 1 większych od wartości maksymalnej w próbie ostatniej. Otrzymujemy liczbę m. Wynik m porównujemy przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ z wartością tabelaryczną m_α. Jeżeli $m \geq m_\alpha$ przy danym poziomie istotności hipotezę odrzucamu. Jeśli $m < m_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Jeżeli hipotezę odrzucimy wówczas wówczas porównujemy próbę nr 1 z próbą przedostatnią etc.

Przykład 28. Wybrano próbkę chrząszczy. Rośliny żywicielskie opryskano 4 różnymi aminokwasami i zbadano ubytek ciężaru liści po 24 godzinach, określając w ten sposób intensywność żerowania. Uzyskano następujące wyniki:

Aminokwas A	Aminokwas B	Aminokwas C	Aminokwas D
44	42	72	62
58	44	65	58
62	60	61	49
51	49	61	44
55	49	63	61
57	52	56	62
34	54	76	42
48	55	71	56
51	47	56	62
46	44	69	44

Przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że aminokwasy mają jednakowy wpływ na intensywność żerowania. Czytelnik może zastosować jeden z testów opisanych w pkt. 5. Po zweryfikowaniu hipotezy i odrzuceniu jej przy pmocy testu m określamy, które z aminokwasów wpływają na intensywność żerowania.

Rozwiązanie. Znajdujemy wartości maksymalne dla poszczególnych aminokwasów:

Aminokwas A - 62
Aminokwas B - 60
Aminokwas C - 76
Aminokwas D - 62

Porównujemy C i B. W próbie C jest 8 wartości większych niż wartość maksymalna w próbie B, a zatem $m = 8$. Ponieważ $m_\alpha = 6 <$ od $m = 8$ dla $n = 10$ i $k = 3$ przy $\alpha = 0.05$ (tab. 13) hipotezę odrzucamy.

Porównujemy C i (A, D). W próbie C jest 6 wartości większych niż wartość maksymalna (A, D), a zatem $m = 6$. Ponieważ $m_\alpha = 6$ jest równe $m = 6$ dla $n = 10$ i $k = 3$ przy $\alpha = 0.05$ hipotezę odrzucamy. Aminokwas C ma istotnie różny wpływ od grupy 3 aminokwasów (A, B, D) o podobnym działaniu.

Piśmiennictwo: Conover, 1968; Puchalski, 1980.

7. TESTY NIEZALEŻNOŚCI χ^2

Testy niezależności cech służą do określenia stopnia współzależności (korelacji) między cechami.

7. 1. Tablice kontyngencyjne dwucechowe 2 x 2

Tablica kontyngencyjna 2 x 2 jest to tablica typu:

warianty cechy 2	warianty cechy 1		Razem
	1	1	
1	a	b	a+b
2	c	d	c+d
Razem	a+c	b+d	n

Dla zweryfikowania hipotezy, że cechy są niezależne najczęściej używamy funkcji:

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc - 1/2n)^2}{(a + c)(b + d)(a + d)(c + d)}$$

przy $\nu = 1$ stopniu swobody, gdzie a, b, c, d oznaczają odpowiednie pola w tablicy czteropolowej.

Gdy liczebność w którejś z kratek tablicy jest mniejsza od 5 (niektórzy autorzy przyjmują 10 jako dolną granicę dla skuteczności testu) używamy powyższego wzoru z poprawką Yatesa:

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc - 1/2n)^2}{(a + c)(b + d)(a + d)(c + d)}$$

przy $\nu = 1$ stopniu swobody.

Przykład 29. Zbadano liczebność dwóch gatunków owadów na pszenicy uprawianej w warunkach naturalnych i w izolatorach. Uzyskano następujące wyniki:

struktura fauny	warunki uprawy		Razem
	warunki naturalne	izolatory	
liczebność gatunku 1	350	205	555
liczebność gatunku 2	250	195	445
Razem	600	400	1000

Na poziomie istotności α = 0.05 zweryfikować hipotezę, że brak jest zależności między warunkami uprawy a strukturą fauny.

Rozwiązanie.

$$\chi^2 = \frac{1000(350*195 - 205*250)^2}{600*400*555*445} = 4.876$$

Ponieważ χ^2_α = 3.841 przy φ = 1 stopniu swobody i α = 0.05 jest mniejsze od χ^2 = 4.876 odrzucamy hipotezę o braku zależności. Warunki uprawy wpływają na strukturę fauny.

7. 2. Tablice kontyngencyjne dwucechowe r x k

Dla weryfikacji hipotezy zerowej o braku zależności korzystamy z funkcji testowej:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_o - f_t^*)^2}{f_t^*}$$

gdzie f_o oznacza liczebność z próby, f_t^* - liczebność oczekiwaną. Wzoru tego używamy przy liczebnościach w każdej kratce większych od 5 (niektórzy autorzy przyjmują liczbę 10). Jeżeli liczebności są mniejsze należy zmniejszyć liczbę wariantów cechy sumując wyniki w sąsiadujących rzędach lub kolumnach. Wartość porównujemy z wartościami krytycznymi $\chi^2_{\alpha 1}$ przy poziomie istotności P = 1 - 1/2 α i $\chi^2_{\alpha 2}$ przy poziomie istotności 1/2 α dla ν = (k - 1)(r - 1) stopni swobody. Jeżeli $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha 2}$ lub $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha 1}$ hipotezę zerową odrzucamy. Jeżeli wartość χ^2 zawiera się w przedziale $\chi^2_{\alpha 1} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha 2}$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Przykład 30. Obserwowano liczebność 4 ras barwnych mszycy grochowej na 3 roślinach żywicielskich. Uzyskano następujące wyniki:

liczebność	rasa barwna 1	2	3	4	Razem
roślina 1	1768	807	189	47	2811
roślina 2	946	1387	746	53	3132
roślina 3	115	438	288	16	857
Razem	2829	2632	1223	116	6800

Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zwryfikować hipotezę, że brak jest zależności między zabarwieniem ciała, a preferencjami mszyc do różnych roślin żywicielskich.

Rozwiązanie. Obliczamy liczebności oczekiwane f_t^*. Liczebność oczekiwana jest zaokrąglonym do jedności iloczynem sumy rzędu i sumy kolumny, w których znajduje się badany wynik podzielony przez ogólną liczebność. Np. dla kratki 1768 licxzebność oczekiwana wynosi:

$$\frac{2811*2829}{6800} = 1169$$

W ten sposób tworzymy tabelę liczebności oczekiwanych:

	1	2	3	4	Razem
1	1169	1088	506	48	2811
2	1303	1212	563	54	3132
3	357	332	154	14	857
Razem	2829	2632	1223	116	6800

Liczebności brzegowe rzędów i kolumn pozostają bez zmian. Obliczamy: $\chi^2 = \frac{(1768 - 1169)^2}{1169} + \frac{(807 - 1088)^2}{1088} + \ldots + \frac{(16 - 14)^2}{14} = 1075.47$

Znajdujemy $\chi^2_{\alpha 1}$ = 1.635 przy poziomie istotności P = 1- 1/2α = 1- 0.05 = 0.95 dla ν= (k - 1)(r - 1) = 3*2 = 6 stopni swobody oraz $\chi^2_{\alpha 2}$ = 16.812 przy poziomie istotności 1/2 α = 0.05 i przy 6 stopniach swobody (tabl. 5).

Ponieważ wartość χ^2 znajduje się poza granicami przedziału wyznaczonego przez wartości krytyczne $\chi^2_{\alpha 2}$ i $\chi^2_{\alpha 2}$ hipotezę o braku zależności odrzucamy. Istnieje zależność między zabarwieniem ciała mszyc a ich preferencjami do roślin.

Uwaga 1. Aby obliczyć χ^2 można skorzystać z wzoru:

$$\chi^2 = n\left(\sum \frac{f_o}{r_j k_i} - 1\right)$$

gdzie f_o oznacza liczebność z próby, a r i k liczebności brzegowe dla rzędu i kolumny, w których znajduje się wynik; n - oznacza liczebność ogólną.

Przykład 31. Dla przykładu 30:

$$\chi^2 = 6800\left(\frac{1768^2}{2811*2829} + \frac{807^2}{2811*2632} + \ldots + \frac{16^2}{857*116} - 1\right) =$$

1073.28

Różnica między tym a poprzednim sposobem wynika jedynie z zaokrągleń, gdyż powyższy wzór jest przekształceniem wzoru poprzedniego.

7. 3. Tablice kontyngencyjne trójcechowe

Gdy rozpatrujemy tablicę trójcechową r x k x t mamy do czynienia z trzema cechami A, B, C, gdzie cecha A obejmuje r kategorii (wierszy), cecha B obejmuje k kategorii (kolumn), a cecha C obejmuje t kategorii (bloków).

Weryfikujemy hipotezę, że interakcja trzech cech jest zerowa. Do weryfikacji hipotezy używamy funkcji statystyki χ^2:

$$\chi^2_{ABC} = \chi^2_T - \chi^2_{AB} - \chi^2_{AC} - \chi^2_{BC}$$

przy $\nu = \nu_T$ - (r - 1)(k - 1) - (r - 1)(t - 1) - (k - 1)(t - 1) stopniach swobody gdzie:

$$\chi_T = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \sum_{k=1}^{t} \frac{(f_o - f_t^*)^2}{f_t^*}$$

przy ν_T = rkt - (r + k + t) +3 1 1 stopniach swobody.

Liczebności oczekiwane obliczamy z wzoru:

$$f_t^* = \frac{f_{i..}\ f_{.j.}\ f_{..k}}{n^2}$$

gdzie $f_{i..}$, $f_{.j.}$, $f_{..k}$ oznaczają sumy brzegowe odpowiadające i-tej kategorii cechy A, j-tej kategorii cechy B i k-tej kategorii cechy C. Kropki oznaczają sumy względem wskaźników na miejscu których umieszczono kropki.

Przykład 32. Owady podzielono według 2 kategorii 3 cech:

płeć: samiec, samica
wybiórczość pokarmowa: sosna, świerk
reakcja na feromon: pozytywna, brak

Uzyskano następujące wyniki:

	wybiórczość pokarmowa				
	świerk		sosna		Razem
reakcja na feromon	pozytywna	negatywna	pozytywna	negatywna	
płeć:					
samiec	7	66	0	41	114
samica	6	161	6	113	286
Razem	13	227	6	154	400

Na poziomie istotności α = 0.1 zweryfikować hipotezę, że brak jest zależności między płcią, wybiórczością pokarmową i reakcją na feromon.

Rozwiązanie. Na podstawie powyższej tabeli sporządzamy 3 tabele:

wybiórczość pokarmowa	świerk	sosna	Razem	
płeć:				
samiec	73	41	114	AB
samica	167	119	286	
Razem	240	160	400	

reakcja na feromon	pozytywna	negatywna	Razem	
płeć:				
samiec	7	107	114	AC
samica	12	274	286	
Razem	19	381	400	

reakcja na feromon	pozytywna	negatywna	Razem	
wybiórczość pokarmowa:				
świerk	13	227	240	BC
sosna	6	154	160	
Razem	19	381	400	

Obliczamy χ^2 kolejno dla każdej tabeli korzystając z wzoru dla tablicy kontyngencyjnej dwucechowej (patrz rozdział 7.1).

Obliczamy:

$$\chi^2_{AB} = \frac{400(73*119 - 41*167)^2}{240*160*114*286} = 1.082$$

$$\chi^2_{BC} = \frac{400(13*154 - 227*6)^2}{19*381*240*160} = 0.589$$

$$\chi^2_{AC} = \frac{400(6*274 - 12*107)^2}{19*381*114*286} = 0.681$$

Wszystkie te wartości są nieistotne przy $\nu = 1$ stopniu swobody i przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Następnie tworzymy tabelę liczebności oczekiwanych:

reakcja na feromon	wybiórczość pokarmowa			
	świerk		sosna	
	pozytywna	negatywna	pozytywna	negatywna
płeć:				
samiec	3.25	65.15	2.17	43.43
samica	8.15	163.45	5.43	108.91

Obliczamy:

$$\chi^2_T = \frac{(7 - 3.25)^2}{3.25} + \frac{(66 - 65.15)^2}{65.15} + \ldots + \frac{(113 - 108.91)^2}{108.91} =$$

6.899

przy $\nu_T = 2*2*2 - (2 + 2 + 2) + 3 - 1 = 4$ stopniach swobody.

Obliczamy:

$$\chi^2_{ABC} = 6.899 - 1.082 - 0.681 - 0.589 = 4.547$$

przy $\nu = 4 - (2 - 1)(2 - 1) - (2 - 1)(2 - 1) - (2 - 1)(2 - 1) = 4 - 1 - 1 - 1 = 1$ stopniu swobody.

Wartość χ^2_{ABC} porównujemy z wartościami krytycznymi $\chi^2_{\alpha 1}$ przy poziomie istotności $P = 1 - 1/2\alpha = 1 - 0.05 = 0.95$ i $\chi^2_{\alpha 2}$ przy poziomie istotności $1/2\alpha = 0.05$ przy $\nu = 1$ stopniu swobody. $\chi^2_{\alpha 1} = 0.00393$, $\chi^2_{\alpha 2} = 3.841$ (tabl. 5).

Ponieważ wartość χ^2_{ABC} mieści się poza granicami przedziału wyznaczonego przez wartości krytyczne $\chi^2_{\alpha 1}$ i $\chi^2_{\alpha 2}$ interakcja między płcią, wybiórczością pokarmową i reakcją na feromon jest istotna (istnieje współzależność).

Piśmiennictwo: OKTABA,1971; PUCHALSKI, 1980; STEEL, TORIE, 1981.

8. NIEPARAMETRYCZNE MIARY KORELACJI

8. 1. Współczynnik T Czuprowa

Przy użyciu tego współczynnika określa się siłę związku między badanymi cechami. Oblicza się go z wzoru:

$$T^2 = \frac{\chi^2}{n\sqrt{(r-1)(k-1)}} \qquad 2$$

gdzie T jest współczynnikiem Czuprowa, χ^2 wartością statystyki χ^2 dla tabeli r x k, r - liczbą rzędów, a k - liczbą kolumn.

Warotść współczynnika zawiera się w przedziale:

$$0 \geq T \leq 1$$

Przykład 33. Przeanalizowano liczebność dwóch gatunków mszyc na liściach i kłosach oraz łodygach zbóż. Uzyskano następujące wyniki:

	gatunek 1	gatunek 2	Razem
kłosy	70	50	120
liście	52	38	90
łodygi	28	18	46
Razem	150	106	256

Określić siłę zależności między gatunkiem, a miejscem żerowania.

Rozwiązanie: $\chi^2 = 0.133$ 9wyliczenie pomijam, sposób wyliczenia podano w rozdziale 7.2), r = 3, k = 2, n = 256.

Obliczamy:

$$T^2 = \frac{0.133}{256\sqrt{(2-1)(3-1)}} = \frac{0.133}{362} = 0.0004$$

Im wyższa wartość współczynnika tym większa siła zależności.

Niski współczynnik oznacza brak jakiejkolwiek zależności.

Piśmiennictwo: BIELECKI, JURKIEWICZ, SZYMANOWSKA, 1978.

8. 2. Współczynnik W Bykowskiego

Współczynnik ten określa siłę związku pomiędzy badanymi cechami. Obliczamy go z wzoru:

$$W = \frac{(a + d) - (b + c)}{a + b + c + d}$$

gdzie a, b, c, d oznaczają odpowiednie pola tablicy czteropolowej. Wartość współczynnika mieści się w przedziale:

$$- 1 \leq W \leq 1$$

przy czym wartość 0 oznacza brak związku. Im wartość W jest bliższa brzegu przedziały tym silniesjzy jest związek między badanymi cechami. Wartości ujemne oznaczają zależność odwrotnie proporcjonalną.

Przykład. 34. Odłowiono 320 uskrzydlonych i nieuskrzydlonych mszyc należących do jednego gatunkku, ale zasiedlających różne gatunki roślin. Otrzymano następujące wyniki:

preferencje	uskrzydlone	bezskrzydłe	Razem
1 roślina	51	80	131
2 roślina	53	136	189
Razem	104	216	320

Określić siłę zależności pomiędzy obecnością skrzydeł i preferencjami mszyc do roślin.

Rozwiązanie:

$$W = \frac{(51 + 136) - (53 + 80)}{320} = 0.169$$

Niska wartość współczynnika oznacza brak korelacji między badanymi cechami.

Uwaga 1. W zależności od wartości współczynników korelacji czy zbieżności przyjmuje się następuj ce określenia na oznaczenie siły związku:

$0 \leq r \leq |0.2|$ brak korelacji

$|0.2| < r \leq |0.4|$ korelacja słaba

$|0.4| < r \le |0.7|$ korelacja umiarkowana

$|0.7| < r \le |0.9|$ korelacja wysoka

$|0.9| < r \le |1|$ korelacja ścisła

Piśmiennictwo: BIELECKI, JURKIEWICZ, SZYMANOWSKA, 1978; BOGUCKI, 1979; ZGIRSKI, GONDKO, 1979.

8. 3. Współczynnik zbieżności Q Yule'a

Współczynnik ten określa siłę związku pomiędzy badanymi cechami. Obliczamy go według wzoru:

$$Q = \frac{ad - bc}{ad + bc}$$

gdzie a, b, c, d oznaczają odpowiednie pola w tablicy czteropolowej .

Wartość współczynnika zawiera się w przedziale:

$$-1 \le Q \le 1$$

Wartość współczynnika q oznacza brak korelacji. Im wartość współczynnika Q jest bliższa brzegu przedziału tym silniejszy jest związek między badanymi cechami.

Przykład 35. Zbadano próbkę 212 gatunków mszyc posiadających pełny i niepełny cykl życiowy, polifagicznych lub monofagicznych. Uzyskano następujące wyniki:

specyficzność pokarmowa	cykl życiowy		Razem
	pełny	skrócony	
monofagi	84	5	89
polifagi	43	80	123
Razem	127	85	212

Należy określić siłę związku między charakterem cyklu życiowego, a specyficznością pokarmową mszyc.

Rozwiązanie:

$$Q = \frac{84*80 - 43*5}{84*80 + 43*5} = 0.938$$

Wysoka wartość współczynnika świadczy o istnieniu ścisłej

$$\varnothing = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

W przypadku obliczania wartości ø z wartości χ^2 należy zwrócić uwagę na znak współczynnika ø. Współczynnik ten może być dodatni lub ujemny, podczas gdy obliczony z powyższego wzoru jest zawsze dodatni, gdyż zawsze dodatnia jest wartość funkcji.

Powyższy wzór umożliwia obliczenie ø dla tablicy większej niż 2 x 2. Jednak wówczas współczynnik ø nie ma górnej granicy co utrudnia interpretację współczynnika lub wykonywanie porównań. W przypadku tablic większych niż 2 x 2 lepiej jest używać współczynnika V Cramera.

Przykład 36. Ekipa pracowników w ciągu godziny odłowiła na 1 powierzchni badawczej 38 chrząszczy i 4 motyle, a na drugiej powierzchni 9 motyli i 4 chrząszcze. Obliczyć siłę zależności między miejscem odłowu, a składem fauny.

Rozwiązanie: Wyniki układamy w tablicy czteropolowej:

skład fauny	miejsce odłowu		Razem
	pow. 1	pow. 2	
motyle	4	9	13
chrząszcze	38	4	4
Razem	42	13	55

Obliczamy wartość współczynnika:

$$\varnothing = \frac{4*4 - 38*9}{13*42*13*42} = -0.597$$

Istnieje umiarkowana korelacja ujemna między miejscem odłowu, a składem fauny. Obliczamy istotność korelacji:

$$\chi^2 = 0.597^2*55 = 19.602$$

Bezpośrednie obliczenie χ^2 w tym przykładzie nie byłoby możliwe, gdyż liczebność w 2 kratkach tablicy jest mniejsza od 5.

Wartość krytyczna χ^2_α (tabl. 5) dla $\nu = (k - 1)(r - 1) = (2 - 1)(2 - 1) = 1$ stopnia swobody (k i r oznaczają liczbę kolumn i korelacji między badanymi cechami. Sprawdzamy istotność tej korelacji obliczając wartość statystyki

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + c)(b + d)(a + b)(c + d)} = 75.912$$

Podstawienie danych do wzoru i sprawdzenie tej wartości pozostawiam czytelnikowi.

Z tabl. 5 odczytujemy wartość krytyczną $\chi^2_\alpha = 3.841$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i $\nu = 1$ stopniu swobody. Ponieważ $\chi^2 = 75.912 > \chi^2_\alpha = 3.841$ związek badanych cech jest istotny statystycznie (nie jest dziełem przypadku).

W przypadku liczebności mniejszej od pięciu występującej w którejkolwiek kratce stosujemy wzór z poprawką (patrz rozdz. 7.1).

Piśmiennictwo: BIELECKI, JURKIEWICZ, SZYMANOWSKA, 1978.

8. 4. Współczynnik ø Pearsona

Współczynnik ten określa siłę związku między badanymi cechami. Oblicza się go ze wzoru:

$$\varnothing = \frac{ad - bc}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)}$$

gdzie a, b, c, d oznaczają odpowiednie pola tablicy czteropolowej (patrz rozdział 8.1).

Wartość współczynnika zawiera się w przedziale:

$$-1 \leq \varnothing \leq 1$$

dla tablicy czteropolowej.

Im wartość współczynnika jest bliższa granicy przedziału tym silniejszy jest zwiżek między badanymi cechami. Współczynnik ten mierzy siłę związku między cechami, podczas gdy test χ^2 określa istotność tego związku. Znając wartość współczynnika ø można obliczyć wartość χ^2 z wzoru:

$$\chi^2 = \varnothing^2 n$$

gdzie n oznacza łączną liczebność w tabeli.

Jeżeli znamy χ^2 możemy obliczyć ø z wzoru:

rzędów w tablicy czteropolowej) wynosi 3.841 przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Ponieważ $\chi^2_\alpha = 3.841 < \chi^2 = 19.602$ więc opisywana zależność jest istotna statystycznie.

Piśmiennictwo: BIELECKI, JURKIEWICZ, SZYMANOWSKA, 1978; NORCLIFFE, 1986; SNEATH, SOKAL, 1973.

8. 5. Współczynnik V Cramera

Jest on oparty na współczynniku ø Pearsona, ale jego wartość zawiera się w przedziale:

$$0 \le V \le 1$$

Współczynnik ten stosuje się do tablic większych niż 2 x 2. Współczynnik V dopasowuje współczynnik ø do mniejszej z liczb k lub r oznaczającej liczbę rzędów lub kolumn w tablicy:

$$V = \frac{\o^2}{\min(k - 1)(r - 1)}$$

Przykład 37. W przykładzie 38 omówiono przykład tabeli 4 x 3 dla której $\chi^2 = 71.244$. Obliczamy wartość $\o^2 = \chi^2/n = 71.24/18993 = 0.0038$, a zatem: $V = \frac{0.0038}{3 - 1} = 0.0019$

co oznacza brak związku.

Piśmiennictwo: NORCLIFFE, 1986.

8. 6. Współczynnik kontyngeencji C

Współczynnik kontyngencji obliczamy z wzoru:

$$\sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Wartość χ^2 można obliczyć z wzoru:

$$\chi = \sum \frac{(f_o - f_t^*)^2}{f_t^*}$$

gdzie f_o oznacza liczebność obserwowaną, f_t^* - liczebność oczekiwaną. Jeżeli liczba kolumn jest taka sama jak rzędów wówczas współczynnik C przyjmuje wartość:

$$0 \leq C \leq \sqrt{\frac{k-1}{k}}$$

gdzie k oznacza liczbę kolumn. Górna granica C nie jest znana i zależy od wielkości tablicy. Wartości C nie mogą być bezpośrednio porównywane z innymi współczynnikami. Porównywać można tylko współczynniki dla tabel o takich samych wymiarach.

Przykład 38. Zbadano liczebność 3 gatunków owadów w 4 typach środowisk i uzyskano następujące wyniki:

specyficzność pokarmowa	agrocenozy	łąki	bory	lasy	Razem
zoofagi	2333	23	445	360	3161
fitofagi	217	5	35	23	280
inne	12092	279	1992	1189	15552
Razem	15642	307	2472	1572	18993

Ustalić czy istnieje zależność między typem środowiska, a sposobem odżywiania się zasiedlającej go fauny.

Rozwiązanie: Obliczamy liczebności oczekiwane f_t^*. Liczebność oczekiwana jest iloczynem sumy rzędu i sumy kolumny, w której znajduje się badana obserwacja podzielonym przez łączną liczebność wszystkich obserwacji (patrz rozdział 7.2). W ten sposób obliczamy wartości oczekiwane dla wszystkich kratek i otrzymujemy tablicę:

specyficzność pokarmowa	agrocenozy	łąki	bory	lasy	Razem
zoofagi	2437	51	411	262	3161
fitofagi	216	5	36	23	280
inne	11989	251	2025	1287	15552
Razem	14642	307	2472	1572	18993

Należy zwrócić uwagę aby wartości brzegowe tablicy pozostały nie zmienione. Dalszeobliczenia przeprowadzamy następująco: zoofagi x agrocenozy $f_o = 2333$, $f_t = 2437$

$$\frac{(f_o - f_t)^2}{f_t} = \frac{(2333 - 2437)^2}{2437}$$

Tak obliczone wartości sumujemy i otrzymujemy:

$$\frac{(2333 - 2437)^2}{2437} + .. + \frac{(1189 - 1287)^2}{1287} = 71.244$$

Mając wartość χ^2 obliczamy:

$$C = \sqrt{\frac{71.244}{71.244 + 18993}} = 0.061$$

Wartość współczynnika świadczy, że nie ma korelacji po między tyem środowiska, a sposobem odżywiania się zasiedlającej je fauny.

Piśmiennictwo: NORCLIFFE, 1986; PUCHALSKI, 1980; WRIGLEY, 1979, 1981.

8. 7. Współczynnik korelacji rang Spearmana R_{rr} (dwie skale porządkowe)

Współczynnik korelacji rang oblicza się z wzoru:

$$R_{rr} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

gdzie D oznacza różnicę pomiędzy rangammi cech x i y, n - liczbę par obserwacji.

Istotność współczynnika korelacji obliczamy z wzoru:

$$t = R_{rr}\sqrt{\frac{n - 2}{1 - R_{rr}^2}}$$

Wartości tego współczynnika mają rozkład t Studenta z $\nu = n - 2$ stopniami swobody.

Współczynnika R_{rr} używa się, gdy dane mogą być uporządkowane według rang (dwie skale porządkowe), gdy nie są spełnione założenia testów parametrycznych (np. o normalności rozkładu), gdy nie znamy rozkładu lub gdy rozkład nie jest normalny i nie może być transformowany do normalnego.

Przykład 39. Przez dwanaście lat prowadzono odłowy chrząszczy na tej samej powierzchni. Chrząszcze ważono i określano grubość pokryw. Uzyskano następujące wyniki:

Rok	Ciężar y_i	Grubość pokryw x_i
1	47.4	646
2	48.5	658
3	49.7	646
4	53.3	645
5	61.4	716
6	66.0	692
7	70.5	692
8	77.6	714
9	79.3	738
10	85.8	704
11	92.0	732
12	99.6	756

Określić istnienie i siłę zależności między ciężarem chrząszczy, a grubością pokryw.

Rozwiązanie: Nadajemy rangi (kolejne numery) wartościom szeregu y_i i odzielnie szeregu x_i. Obliczamy różnicę rang dla każdej pary i obliczamy kwadrat tej różnicy:

	Ranga	Ranga	D_i	D_i^2
	1	2.5	-1.5	2.25
	2	4	2	4
	3	2.5	0.5	0.25
	4	1	3	9
	5	9	-4	16
	6	5.5	0.5	0.25
	7	5.5	1.5	2.25
	8	8	0	0
	9	11	-2	4
	10	7	3	9
	11	10	1	1
	12	12	0	0
Suma	78	78		48

Sprwadzamy poprawność rangowania:

$$\frac{n(n + 1)}{2} = \frac{12*13}{2} = 78$$

$$\text{Obliczamy } R_{rr} = \frac{6*48}{12(12^2 - 1)} = 0.832$$

Korelacja jest wysoka. Sprawdzamy istotność współczynnika korelacji:

$$t = 0.832\sqrt{\frac{10}{1 - 0.832^2}} = 4.741$$

Z tablicy rozkładu t Studenta (tabl. 14) odczytujemy wartość krytyczną $t_\alpha = 2.228$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i $\nu = n - 2 = 12 - 2 = 10$ stopniach swobody. Ponieważ $t = 4.741 > t_\alpha = 2.228$ więc korelacja jest istotna (wiarygodna) statystycznie.

Piśmiennictwo: BIELECKI, JURKIEWICZ, SZYMANOWSKA, 1978; STEEL, TORRIE, 1981.

8. 8. Współczynnik korelacji R_{rd}
(skale porządkowa i dychotomiczna)

Współczynnika tego używamy wówczas, gdy jedna z cech jest wyrażona w skali porządkowej (rangami), a druga alternatywnej (dychotomicznej): tak - nie, 1 - 0, obecny - nieobecny, etc. Korelację obliczamy z wzoru:

$$R_{rd} = \frac{2T - n_1(n + 1)}{\sqrt{n_1(n^2 - 1)(n - n_1)/3}}$$

gdzie T jest sumą rang obserwacji, w których stwierdzono obecność cechy "tak", n_1 - liczbą obserwacji "tak", n - łączną liczbą obserwacjji. Istotność obliczamy tak samo jak dla współczynnika korelacji rang Spearmana (patrz poprz. paragraf).

Przykład 40. Obserwowano zagęszczenie włosków na powierzchni liści i badano czy ryjkowce składają jaja czy nie. Uzyskano następujące wyniki:

nr liścia	zagęszczenie włosków (rangi)	składanie jaj
1	9	nie
2	1	tak
3	5	tak
4	2	nie
5	10	nie
6	3	tak
7	6	tak
8	8	nie
9	4	tak
10	7	nie

Sprawdzić czy istnieje korelacja między owłosieniem liści a zachowaniem ryjkowców.

Rozwiązanie:

$$n_1 = 5,\ n_2 = 10,\ T = 1 + 5 + 3 + 6 + 4 = 19$$

$$R_{rd} = \frac{2*19 - 5(10 + 1)}{\sqrt{5(10^2 - 1)(10 - 5)/3}} = -\ 0.592$$

Istnieje umiarkowana korelacja. Sprawdzamy jej istotność:

$$t = 0.592\sqrt{\frac{10 - 2}{1 - 0.592^2}} = 2.070$$

Ponieważ $t_\alpha = 2.306$ dla $\nu = n - 2 = 10 - 2 = 8$ stopni swobody (tabl. 14) jest większe od $t = 2.070$ korelację uznajemy za nieistotną.

Piśmiennictwo: BOGUCKI, 1979.

8. 9. Punktowy dwuszeregowy współczynnik korelacji R_{id} (skale interwałowa i dychotomiczna)

Współczynnik ten stosujemy, gdy jedna ze zmiennych wyrażonz jest ilościowo lub w skali interwałowej, a druga w skali dychotomicznej (alternatywnej). Oczywiście skalę interwałową można zastąpić skalą porządkową i obliczyć wartość współczynnika R_{id}.

Przy obliczaniu współczynnika nie określa si rozkładu x (skala dychotomiczna) - jest on dowolny. Zakłada się jedynie, że liczby obserwacji "tak" i "nie" powinny być zbliżone do siebie, a w każdej z tych podgrup rozkład zmiennej y (skala interwałowa) powinien być normalny, a wariancje w obu podgrupach podobne. Uwaga ta nie dotyczy przypadku, gdy skala interwałowa jest zastąpiona przez skalę porządkową.

Obliczamy n_o i n_1, czyli liczby obserwacji zmiennej x zaliczanych do podgrup "tak" i "nie". Następnie z wzorów:

$$\bar{y}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n_o} y_{oi}}{n_o} \qquad y_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} y_{1i}}{n_1}$$

obliczamy średnie zmiennych y w podgrupie "tak" i podgrupie "nie". Następnie obliczamy odchylenie standartowe:

$$s_y = \sqrt{\frac{n\sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n - 1)}}$$

gdzie $n = n_o + n_1$.

Obliczamy współczynnik:

$$R_{id} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_o}{s_y} \sqrt{\frac{n_o n_1}{n(n-1)}}$$

Istotność korelacji sprawdzamy jak przy korelacji rang Spearmana.

Przykład 41. Zbadano związek pomiędzy liczebnością populacji owadów, a występowaniem pewnej choroby grzybowej. Uzyskano następujące wyniki:

nr populacji	występowanie choroby	liczebność
1	0	15
2	1	20
3	0	25
4	0	25
5	0	100
6	0	150
7	0	175
8	0	200
9	0	200
10	0	220
11	1	300
12	0	300
13	0	300
14	0	314
15	0	325
16	0	390
17	1	500
18	1	600
19	0	600
20	1	700
21	1	720
22	1	725
23	1	850
24	1	974
25	1	1600
26	1	1684
27	0	1915
28	1	2460
29	1	2586
30	1	2996

Sprawdzić czy istnieje korelacja między liczebnością populacji, a występowaniem choroby grzybowej.

Rozwiązanie: Najpierw należy sprawdzić równość wariancji liczebności w populacji z chorobą i wariancji liczebności w populacji nie zarażonej chorobą. Zadanie to pozostawiam czytelnikom. Wariancję obliczamy z wzoru na odchylenie standartowe, ale bez obliczania pierwiastka, gdyż wariancja jest kwadratem odchylenia standartowego.

Ponieważ w obu grupach występuje duża skośność rozkładu, a wariancję różnią się, transformujemy dane logarytmicznie. W ten sposób otrzymujemy rozkłady zbliżone do normalnych o podobnych wariancjach:

nr populacji	występowanie choroby	liczebność
	logy	$(\text{logy})^2$
1	1.176	1.383
2	1.301	1.693
3	1.398	1.954
4	1.398	1.954
5	2.000	4.735
6	2.176	4.735
7	2.243	5.031
8	2.301	5.295
9	2.301	5.295
10	2.342	5.485
11	2.477	6.136
12	2.477	6.136
13	2.477	6.136
14	2.497	6.235
15	2.512	6.310
16	2.591	6.713
17	2.699	7.285
18	2.778	7.717
19	2.778	7.717
20	2.845	8.094
21	2.857	8.162
22	2.860	8.180
23	2.929	8.579
24	2.989	8.934
25	3.204	10.266

c.d. na następnej stronie

c.d ze strony poprzedniej

26	3.226	10.407
27	3.282	10.772
28	3.391	11.499
29	3.413	11.649
30	3.477	12.090
	76.395	205.842

$n_o = 16$, $n_1 = 14$, $\sum y_o = 45.448$, $\sum y_1 = 30.947$, $n = n_o + n_1 = 30$

$$\bar{y}_o = \frac{45.448}{16} = 2.843 \qquad \bar{y}_1 = \frac{30.947}{14} = 2.211$$

Obliczamy odchylenie standartowe:

$$s_y = \sqrt{\frac{30*205.842 - (76.395)^2}{30*29}} = 0.624$$

Obliczamy współczynnik korelacji:

$$R_{id} = \frac{2.843 - 2.211}{0.624}\sqrt{\frac{16*14}{30*29}} = 0.514$$

Sprawdzamy istotność współczynnika R_{id}:

$$t = 0.514\sqrt{\frac{30 - 2}{1 - (0.514)^2}} = 3.171$$

Ponieważ t = 2.048 przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i $\nu = n - 2 = 30 - 2 = 28$ stopnia swobody (tabl. 14) jest mniejsze od $t = 3.171$ uznajemy korelację za istotną.

Piśmiennictwo: NORCLIFFE, 1986; WALKER, LEV, 1953.

8. 10. Współczynnik korelacji R_{id} (skale interwałowa i dychotomiczna)

Jeżeli jedna z cech jest opisana ilościowo z ułożeniem danych w klasach, a druga dychotomicznie: brak - obecność, tak - nie, 1 - 0, etc. korelację możemy obliczyć z wzoru:

$$R_{id} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}}{s}\sqrt{\frac{n_1}{n - n_1}}$$

gdzie $\bar{x}_1$ jest średnią obserwacji opisanych w grupie "tak", $\bar{x}$ jest średnią cechy opisanej ilościowo, s jest odchyleniem standartowym cechy opisanej ilościowo, n_1 liczbą obserwacji z cechą "tak", a n liczbą wszystkich obserwacji.

Istotność współczynnika korelacji obliczamy jak dla korelacji rang Spearmana.

Przykład 42. Zbadano liczbę i wielkość złóż jaj składanych przez pewien gatunek motyla w dwóch terminach. Uzyskano następujące rezultaty:

wielkość złoża	$\mathring{x}_i$	liczba złóż jaj czerwiec	liczba złóż jaj lipiec	Razem n_i
6 - 8	7	-	4	4
9 - 11	10	6	12	18
12 - 14	13	14	24	38
15 - 17	16	8	12	20
17 - 20	19	14	4	6
21 - 23	22	4	2	2
24 - 26	25	2	-	2
		Razem		106

Obliczyć korelację pomiędzy terminem i wielkością złoża jaj.

Rozwiązanie: $\bar{x}$ = (7*4 + 10*18 + .. + 25*2): 106 = 1546/106 = 14.58

Obliczamy odchylenie standartowe:

$$s = \sqrt{1/n \sum_{i=1}^{r} (\mathring{x}_i - \bar{x})^2 n_i}$$

$$s = \sqrt{\frac{(7 - 14.58)^2 * 4 + (10-14.58)^2 * 18 + .. + (25 - 14.58)^2 * 2}{106}} =$$

= 3.935

$\bar{x}_1$ = (10*6 + 13*14 + .. + 25*2)/48 = 16.13

$n = 106$, $n_1 = 48$

$$R_{id} = \frac{16.13 - 14.58}{3.935} \sqrt{\frac{48}{106 - 48}} = 0.358$$

Współczynnik R_{id} wskazuje na istnienie słabej korelacji. Sprawdzamy istotność współczynnika:

$$t = 0.358 \sqrt{\frac{106 - 2}{1 - 0.358^2}} = 3.910$$

Ponieważ $t_\alpha = 1.980$ przy $\nu = n - 2 = 106 - 2 = 104$ stopniach swobody (tabl. 14) jest mniejsze od $t = 3.910$ więc korelacja jest istotna.

Piśmieennictwo: Bogucki, 1979.

8. 11. Współczynnik korelacji wielpokrotnej W

Jeżeli chcemy określić współzależność więcej niż dwóch cech stosujemy wzór:

$$W = \frac{12\sum\left(R - \frac{\Sigma R}{n}\right)^2}{k^2 n(n^2 - 1)}$$

gdzie R oznacza sumę rang dla rzędu, k - liczbę kolumn, n - liczbę obserwacji w kolumnie (liczbę rzędów).

Przykład 43. Cztery gatunki polifagicznych mszyc zmuszono do żerowania na 8 roślinach. Zbadano długość życia mszyc na poszczególnych roślinach. Roślinie, gdzie mszyce żyły najdłużej (najlepiej się adaptowały) nadawano rangę 1, a roślinie, gdzie mszyce żyły najkrócej - rangę największą (n). Uzyskano następujące wyniki:

nr rośliny	gatunek A	gatunek B	gatunek C	gatunek D
1	6	3	1	1
2	7	5	3	2
3	8	6	2	3
4	2	1	5	6
5	5	8	8	4
6	3	4	7	5
7	1	2	6	7
8	4	7	4	8

Zbadać zbieżność zdolności adaptacji u 4 gatunków mszyc.

Rozwiązanie: Rangi sumujemy rzędami (dla każdej rośliny) i obliczamy ich sumę:

roślina	1	2	3	4	5	6	7	8	Razem
ranga	11	17	19	14	25	19	16	23	144

Sprawdzamy poprawność rangowania:

$$k\,\frac{n(n+1)}{2} = 4\,\frac{8*9}{2} = 144$$

Obliczamy: sumę rang $\Sigma R/n$, wartość kwadratu różnicy $(R - \Sigma R/n)^2$:

$$\Sigma R/n = 144/8 = 18$$

R	$R - \Sigma R/n$	$(R - \Sigma R/n)^2$
11	-7	49
17	-1	1
19	1	1
14	-4	16
25	7	49
19	1	1
16	-2	4
23	5	25
	Razem	146

Obliczamy W:

$$W = \frac{12*146}{4^2*8(8^2-1)} = \frac{1752}{8064} = 0.217$$

Istnieje niska korelacja zdolności adaptacji 4 gatunków mszyc.

Piśmiennictwo: PUCHALSKI, 1980.

8. 12. Test Olmsteada - Tukeya

W tym teście wartości ekstremalne są wskaźnikiem powiązań pomiędzy zmiennymi. W teście obliczamy sumę kwadrantów i testujemy hipotezę, że brak jest powiązań pomiędzy zmiennymi. Jeżeli obliczona suma kwadrantów T jest większa od wartości tabelarycznej T_{α} przy danym poziomie istotności, wówczas odrzucamy hipotezę o braku powiązań.

Przykład 44. Obserwowano zależność pomiędzy liczbą pęcherzyków jajowych i liczbą składanych później jaj. Uzyskano następujące wyniki:

osobnik nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
jaja	39	29	46	28	31	25	49	57	51	21	42	38	34	47
pęcherzyki	37	34	52	26	32	25	55	65	44	25	45	26	29	30

Określić stopień powiązania między liczbą pęcherzyków jajowych i składanych jaj przy poziomie istotności 0.01.

Rozwiązanie: Wykreślamy spraowane obserwacje (rys. 1). Następnie obliczamy i rysujemy medianę dla każdej zmienneej:

jaja: 21, 25, 28, 29, 31, 34, 38, 39, 42, 46, 47, 49, 51, 57

$$Me_1 = (38 + 39)/2 = 38.5$$

pęcherzyki: 25, 25, 26, 26, 29, 30, 32, 34, 37, 44, 45, 52, 55, 65

$$Me_2 = (32 + 34)/2 = 33$$

Następnie zliczamy od góry (G)(wzdłuż osi y) liczbę obserwacji według wartości bezwzględnych, kończąc, gdy następna obserwacja wypada poza medianą Me_2. Następnie zliczamy wartości od dołu (D), z lewej strony (L.) i z prawej strony (P). Przy każdej wartości zaznaczamy znak kwadrantu. Dla rysunku 1: G = +3, D = +3, L = +5, P = +6. Suma kwadrantów T = 17. Ponieważ T = 17 jest większe niż T_{α} = 15 (tabl. 15) przy poziomie istotności α = 0.01 odrzucamy hipotezę o braku powiązania.

Piśmiennictwo: OLMSTEAD, TUKEY, 1947; STEEL, TORIE, 1981.

9. TESTY JEDNORODNOŚCI χ^2

W testach jednorodności prób określamy czy prawdopodobieństwa występowania wykluczających się i jedynie możliwych wartości cech są takie same w porównywanych rozkładach.

9. 1. Test jednorodności dla r kategorii cechy

Testu używamy dla r wykluczających się kategorii cechy zmiennej w k niezależnych próbach. testujemy hipotezę, że próby pochodzą z jednej populacji tj., że nie ma różnic w rozkładach poszczególnych kategorii cechy pomiędzy poszczególnymi próbami. Do weryfikacji hipotezy używamy funkcji testowej χ^2 jak przy tabelach kontyngencyjnych k x r. Obliczoną wartość porównujemy z wartością $\chi^2_{\alpha 1}$ przy ν = (k -1)(r -1) stopniach swobody oraz poziomie istotności P = 1 - 1/2α oraz $\chi^2_{\alpha 2}$ przy poziomie istotności 1/2α dla tej samej liczby stopni swobody.

Przykład 45. W 5 środowiskach pobrano próbki mszyc i obliczono liczebność 3 kategorii wiekowych. Uzyskano następujące wyniki:

środowisko	dorosłe 1	larwy uskrzydlone 2	larwy bezskrzydłe 3	Razem
1	40	35	15	90
2	27	22	11	60
3	35	22	23	80
4	21	30	19	70
5	27	31	12	70
Razem	150	140	80	370

Na poziomie istotności α = 0.1 zweryfikować hipotezę, że próby pochodzą z jednej populacji czyli, że proporcje osobników w różnym wieku w różnych środowiskach są jednakowe.

Obliczamy liczebności oczekiwane. Sposób obliczenia liczebności oczekiwanych podano w rozdziale 7.2. Po dokonaniu odpowiednich obliczeń powstaje tablica liczebności oczekiwanych:

	1	2	3	Razem
1	37	34	19	90
2	24	22	14	60
3	33	30	17	80
4	28	27	15	70
5	28	27	15	70
Σ	150	140	80	370

Obliczamy:

$$\chi^2 = \frac{(40 - 37)^2}{37} + \frac{(35 - 34)^2}{34} + \ldots + \frac{(12 - 15)^2}{15} = 11.044$$

Odczytujemy $\chi^2_{\alpha 1}$ = 2.733 przy P = 1 - 1/2 = 1 - 0.05 = 0.95 i ν_2 = (r - k)(k - 1) = (3 - 1)(5 - 1) = 8 stopniach swobody oraz $\chi^2_{\alpha 2}$ = 15.507 przy 1/2α = 0.05 i 8 stopniach swobody (tabl. 5). Ponieważ χ^2 mieści się w granicach przedziału wyznaczonego przez wartości krytyczne $\chi^2_{\alpha 1}$ i $\chi^2_{\alpha 2}$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Proporcje poszczególnych stadiów są jednakower w badanych środowiskach.

9. 2. Test jednorodności dla r kategorii cechy

W przypadku, dgy mamy do czynienia z 2 wykluczającymi się kategoriami cechy typu: brak - obecność, 0 - 1 w s próbkach statystykę testową obliczamy z wzoru:

$$\chi^2 = \frac{1}{p(1 - p)} \sum_{i=1}^{s} \frac{f_i^2}{n_i} - \frac{\Sigma f_i}{1 - p}$$

gdzie p = Σf/n jest frakcją sukcesów wśród wszystkich n wyników w s próbach, n_1 jest liczebnością próby, a f_i oznacza liczebność wyników "tak" w danej próbie.

Przykład 46. Z 10 środowisk pobrano losowo po 100 owadów. Owady opryskiwano pewną substancją chemiczną i po 20 minutach obliczono liczbę p osobników, które przeżyły. Były one następpujące:

31, 53, 61, 62, 49, 53, 64, 53, 52, 30

Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zweryfikować hipotezę, że prawdopodobieństwo przeżycia osobników w każdej z prób jest takie samo (lub że odporność osobników na truciznę jest jednakowa w badanych środowiskach).

Rozwiązanie: Wyniki ustawiamy w tabelę:

próba nr	liczba osobników żywych	liczba osobników martwych y_i
1	51	49
2	53	47
3	61	39
4	62	38
5	49	51
6	53	47
7	64	36
8	53	47
9	52	48
10	50	50
Razem	548	452

$p = 452/548 = 0.8248$

$$\chi^2 = \frac{1}{0.8248(1 - 0.8248)}\left(\frac{49^2}{51} + \frac{47^2}{53} + \ldots + \frac{59^2}{50}\right) - \frac{1}{1 - 0.8248} =$$

$6.9202(387.9802) - 2579.9087 = 104.992.$

$\chi^2_{\alpha 1} = 3.325$ przy $\nu = s - 1 = 10 - 9$ stopniach swobody i $P = 1 - 1/2\alpha = 0.95$ oraz $\chi^2_{\alpha 2} = 16.919$ przy $\varphi = 9$ i $1/2\ \alpha = 0.05$ (tabl. 5). Ponieważ wartość χ^2 leży poza granicami przedziału wyznaczonego przez wartości $\chi^2_{\alpha 1}$ i $\chi^2_{\alpha 2}$ hipotezę odrzucamy. Owady pochodzące z różnych środowisk mają różny poziom odporności na truciznę.

9. 3. Test jednorodności dla rozkładu dwumianowego (Bernouliego)

Pobieramy n prób o liczebności k i obserwujemy liczbę x sukcesów. Do weryfikacji hipotezy. że próby pochodzą z tej samej populacji używamy statystyki:

$$\chi^2 = \frac{nS_x^2}{\bar{x}q}$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną wszystkich wartości x, n - liczbą prób, q - oznaczą frakcję (proporcję) niepowodzeń w całym doświadczeniu, a nS_x^2 obliczamy z wzoru:

$$nS_x^2 = \sum x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}$$

Wartości graniczne χ^2 odczytuje się przy $\nu = n - 1$ stopniu swobody.

Przykład 47. Z n = 10 plantacji pobrano k = 100 mszyc. Liczba mszyc porażonych przez grzyby z rodzaju *Enthomophtora* była następująca: 16, 18, 11, 18, 21, 20, 10, 18, 17, 21

Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zweryfikować hipotezę, że próby pochodzą z jednej populacji, tj., że prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie jest jednakowe.

Rozwiązanie: n = 10. Obliczamy średnią liczbę zarażonych kłosów:

$$\bar{x} = (16 + 18 + .. + 21)/10 = 17$$

Obliczamy sumę kwadratów odchyleń nS_x^2:

$$nS_x^2 = 16^2 + 18^2 + .. + 21^2 - 170^2/10 = 130$$

Obliczamy frakcję niepowodzeń dla całego doświadczenia:

$$q = 1 - p = 1 - \Sigma y/nk = 1 - 170/(10*100) = 0.83$$

Obliczamy χ^2:

$$\chi^2 = \frac{130}{17*0.83} = 9.213$$

Z tabl. 5 odczytujemy wartości graniczne $\chi^2_{\alpha1} = 3.325$ przy poziomie istotności $P = 1 - 1/2\alpha = 0.95$ i $\nu = n - 1 = 10 - 1 = 9$ stopniach swobody oraz $\chi^2_{\alpha2} = 16.919$ przy $1/2\alpha = 0.05$ i 9 stopniach swobody. Ponieważ wartość χ^2 leży w obrębie przedziału wyznaczonego przez wartości krytyczne $\chi^2_{\alpha1}$ i $\chi^2_{\alpha2}$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Nie stwierdzono, aby stan zdrowotny populacji mszyc zależał od miejsca zbioru (plantacji).

9. 4. Test jednorodności dla rozkładu Poissona

W każdej z n pobranych prób notujemy pewną ilość sukcesów. Do zweryfikowania hipotezy, że próby są jednorodne (pochodzą z jednej populacji) używamy testu rozproszenia rozkładu Poissona:

$$\chi^2 = \frac{nS_x^2}{\bar{x}}$$

gdzie n oznacza liczbę prób, nS_x^2 oznacza sumę kwadratów odchyleń i jest obliczane z wzoru:

$$nS_x^2 = \sum x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}$$

Przykład 48. Na n = 15 powierzchniach w pobranych próbachh przesiewkowych znaleziono następujące liczby roztoczy:

193, 168, 161, 153, 183, 152, 171, 156, 159, 140, 151, 152, 133, 164, 157

Na poziomie istotności α = 0.1 zweryfikować hipotezę, że rozkład liczby roztoczy na powierzchniach jest równomierny.

Rozwiązanie: $\bar{x} = \sum x/n$ = (193 + 168 + . + 157)/15 = 2393/15 = 199.533 $nS_x^2 = \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n = (193^2 + 168^2 + .. + 157^2) - (2393)^2/15$ = 3229.745

Obliczamy:

$$\chi^2 = \frac{3229.745}{159.533} = 20.245$$

Z tabl. 5 odczytujemy wartości graniczne $\chi^2_{\alpha 1}$ = 6.571 przy P = 1 - 1/2α = 0.95 i ν = n - 1 = 15 - 1 = 14 stopniach swobody oraz $\chi^2_{\alpha 2}$ = 23.685 przy 1/2α = 0.05 i ν = 14 stopniach swobody. Ponieważ χ^2 leży w obrębie przedziału wyznaczonego przez wartości graniczne $\chi^2_{\alpha 1}$ i $\chi^2_{\alpha 2}$ nie możemy odrzucić hipotezy, że próby są jednorodne.

Uwaga 1. W rozdziale 9.3 jest mowa o rozkładzie dwumianowym, gdyż zmienan x jako zmienna dwumianowa może przybierać k + 1 wartości 0, 1, 2, .. k. Całkowita ilość wyników wynosi nk.
Uwaga 2. W rozdziale 9.4 jest mowa o rozkładzie Poissona, gdyż zmienna x jest zmienną losową Poissona przy czym całkowita wielkość serii nie jest znana.

Piśmiennictwo: OCTABA, 1977; STELL, TORIE, 1981.

10. PIŚMIENNICTWO

ANSARI A. R., BRADLEY R. A., 1960. Rans-sum tests for dispersion. Ann. Math. Stat., 4: 18-27.

BIELECKI J., JURKIEWICZ B., SZYMAŃSKA Z., 1978. Zbiór zadań ze statystyki ogólnej i matematycznej. PWN, Warszawa, 347 pp.

BIRNBAUM Z. W., HALL R. A., 1960. Small sample distribution for multisample distribution of the SMIRNOV type. Ann. Math. Stat., 31: 710-720.

BOGUCKI Z., 1979. Elementy staystyki dla biologów. Statystyka opisowa. UAM, Poznań, 120 pp.

CONOVER W. J., 1968. Two k-samples slippage tests. J. Amer. Stat. Assoc., 63: 18-37.

DIXON W. J., MASSEY F. J., 1969. Introduction to statistical analysis. McGraw-Hill, New York, 127 pp.

FRIEDMAN F. J., 1952. Distribution table for the deviation between two sample cumulatives. Ann. Math. Stat., 23: 435-441.

GREŃ J., 1978. Statystyka matematyczna. Modele i zadania. PWN, Warszawa, 363 pp.

KOŁMOGOROV A. N., 1933. Sulla determinazione empiriica di una legge di distribuzione. Giorn. 1st. Ital. Attuari., 4: 83-91.

KRUSKAL W. H., WALLIS W. A., 1952. Use ranks in one-criterion variance analysis. J. Amer. Stat. Assoc., 47: 583-621

MANN H. B., WHITNEY D. R., 1947. On a test of whether one of two random varaibles is stochastically larger then other. Ann. Math. Stat., 18: 50-60.

MASSEY F. J., 1951. The KOŁMOGOROV-SMIRNOV test for goodness of fit. J. Amer. Stat. Assoc., 46: 70.

MASSEY F. J., 1952. Distribution table for the deviation between two samples cumulatives. Ann. Math. Stat., 23: 435-441.

MOOD A. M., 1950. Introduction to the theory of statistics. McGraw-Hill, New York, 235 pp.

MULLER L. H., 1956. Table of percentage points of KOŁMOGOROV statistics. J. Amer. Stat. Assoc., 51: 111-121.

NEAVE H. R., 1981. Statistics tables for mathematicians, engineers, economists and the behavioural and management sciences. George Allen and Unwin, London, 88 pp.

NORCLIFFE G. B., 1986. Statystyka dla geografów. PWN, Warszawa, 258 pp.

OCTABA W., 1977. Elementy statystyki matematycznej i metodyki doświadczalnictwa. PWN, Warszawa, 310 pp.

PETTIT A. N., STEPHENS M. A., 1977 The KOŁMOGOROV-SMIRNOV goodness of fit statistic with discrete and grouped data. Technometrics., 19: 205-210.

OLMSTEAD P. S., TUKEY J. W., 1947. A corner test for association. Ann. Math. Stat., 18: 495-513.

PUCHALSKI T., 1980. Statystyka. Wykład podstawowych zagadnień. PWN, Warszawa, 377 pp.

SIEGEL S., 1956. Nonparametric statistics for the behavioural sciences. McGraw-Hill, New York, 186 pp.

SMIRNOV N. V., 1939. Estimate of deviation between empirical distribution functions in two independent samples. Bull. Mosc. Univ., 2: 3-16.

SMIRNOV N. V., 1948. Tables for estimating the goodnes of fit of empirical distribution. Ann. Math. Stat., 19: 280-281.

SNEATH P. H. A., SOKAL R. R., 1973. Prionciples of numerical taxonomy. Freeman, San Francisco, 327 pp.

STEEL R. G. D., TORIE J. H., 1981. Principles and procedures of statistics. A biometrical approach. McGraw-Hill, London, 633 pp.

WALKER C., 1952. The use of ranks in a test of significance for computing two treatments. Biom., 8: 33-41.

WHITE C., 1952. The use of ranks in a test of significance for computing two treatments. Biom., 8: 33-41.

WILCOXON F., 1945. Individual comparisions by ranking methods. Biom. Bull., 1:80-83.

WILCOXON F., 1947. Probability tables for individual comparisions by ranking methods. Biom. Bull., 3: 119-122.

WILCOXON F., 1949. Some rapid approximate statistical procedures. Amer. Cyan. Comp., Stamford, 32 pp.

WRIGLEY N., 1979. Developments in the statistical analysis of categorial data. progr. Human Geogr., 3: 315-355.

WRIGLEY N., 1981. Categorial data analysis. W: WRIGLEY N., BENNETT R. J. (red.). Quantitative Geography in Britain. Retrospect and Prospect. Routlege, Kogan Paul, London, 287 pp.

ZGIRSKI A., GONDKO R. 1976. Obliczenia biochemiczne. PWN, Warszawa, 403 pp.