ZESPÓŁ AFIDOLOGICZNY

APHIDOLOGICAL ASSOCIATION

ZESZYTY AFIDOLOGICZNE

1990

ZESZYT 1

WARSZAWA

Spis treści zeszytu 1

Wyciąg ze Statutu Zespołu Afidologicznego

13.

Członkowie zwyczajni posiadają wyłączne prawo zamieszczania artykułów naukowych i popularnonaukowych w wydawnictwach Zespołu wydawanych w ramach działalności statutowej. Nie dotyczy to wydawnictw wydawanych w ramach działalności gospodarczej.

Zesz. Afid., 1990, 1: 119-162

OPRACOWYWANIE WYNIKÓW BADAŃ ENTOMOLOGICZNYCH PRZY UŻYCIU NIEPARAMETRYCZNYCH TESTÓW STATYSTYCZNYCH

JACEK PIECHOTA

Zespół Afidologiczny, ul. Marszałkowska 14A/91
00-590 Warszawa

SPIS TREŚCI

Metody statystyczne są rzadko używane przez entomologów. Składa się na to kilka przyczyn: 1) przejście od teorii statystycznej do praktyki jest trudne, 2) statystyki parametryczne wymagają przebrnięcia przez gąszcz obliczeń, a w Polsce brak jest zarówno odpowiedniego sprzętu komputerowego jak i oprogramowania statystycznego, 3) testy nieparametryczne, stosunkowo łatwe do zastosowania i interpretacji, są mało znane.

Autor przedstawił kilkanaście najczęściej stosowanych testów nieparametrycznych, ich założenia i sposób wykonywania obliczeń.

I. TEST SERII JAKO TEST LOSOWOŚCI PRÓBY

W tym teście z populacji generalnej o dowolnym rozkładzie

pobieramy próbę n elementów. Sprawdzamy hipotezę, że sposób pobierania próby (doboru elementów) jest losowy.

Tworzymy ciąg uporządkowany według kolejności pobierania elementów. Obliczamy medianę z próby. Każdemu wynikowi mniejszemu od mediany przypisujemy symbol A, a większemu od niej - symbol B. Liczba elementów A = n_1, liczba elementów B = n_2. Wyniki równe medianie odrzucamy. W ten sposób otrzymujemy n-elementowy ciąg ($n + n_1 + n_2$) mieszany składający się z symboli A i B. Obliczamy liczbę u serii; np. w ciągu:

A BB AA BBB AAAA B AA B

liczba serii u = 8.

Jeżeli hipoteza o losowości próby jest prawdziwa liczba serii powinna być zgodna z rozkładem tabelarycznycm. W oparciu o ten rozkład tworzymy dwustronny obszar krytyczny odczytując u_{α_1} przy $1/2\ \alpha = 0.05$ i u_{α_2} przy $1/2\ \alpha = 0.95$. Wartość empiryczną u porównujemy z u_{α_1} i u_{α_2}. Jeżeli zachodzi nierówność, że $u \leq u_{\alpha_1}$ lub $u \geq u_{\alpha_2}$ wówczas hipotezę o losowości próby odrzucamy. Jeśli $u_{\alpha_1} < u < u_{\alpha_2}$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy o losowości próby.

Przykład. Po otwarciu ula złapano kolejno pierwsze 15 pszczół, które wyleciały. Zbadano ich ciężar ciała. Miały one następujące ciężary, ustawione według kolejności wylatywania: 37, 40, 36, 39, 38, 43, 46, 50, 49, 55, 48, 32, 56, 62, 53. Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zweryfikować hipotezę, że taki dobór pszczół jest losowy.

Rozwiązanie. Porządkujemy wyniki aby obliczyć medianę z próby:

32	40	50
36	43	53
37	$\boxed{46}$	55
38	48	56
39	49	62

Me = 46

Symbolem A oznaczamy wyniki mniejsze od mediany, symbolem B - wyniki większe. Wynik równy medianie pomijamy:

AAAAAA BBBB A BBB.

Liczba serii $u = 4$, $n_1(A) + 7$, $n_2(B) = 7$. Z tab. 1 odczytujemy $u_{\alpha_1} = 4$ dla $1/2\alpha = 0.05$ oraz $u_{\alpha_2} = 11$ dla $1 - 1/2\alpha = 0.95$. Ponieważ $u = 4 = u_{\alpha_1}$ odrzucamy hipotezę o losowości próby. Z ula wylatywały najpierw osobniki lżejsze, o większej ruchliwości.

Przy większej liczebności prób, gdy n_1 i n_2 są większe niż 20 można zastosować aproksymację rozkładem normalnym - obliczamy:

$$z = \frac{u-\mu_u}{\sigma_u}$$

gdzie:

$$\mu_u = \frac{2n_1n_2}{n} + 1$$

a

$$\sigma = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n)}{n^2(n-1)}}$$

Obliczoną wartość porównujemy z wartościami z_α odczytanymi z tab. 2.

Piśmiennictwo: GREN, 1978; SIEGEL, 1956; NORCLIFFE, 1986.

II. TEST ZGODNOSCI ROZKŁADU EMPIRYCZNEGO I ZAKŁADANEGO λ KOŁMOGOROWA

Porównujemy zgodność dystrybuant rozkładu empirycznego (z próby) i teoretycznego. Zakładamy przy tym, że wartości obu dystrybuant są zbliżone, jeżeli populacja generalna ma rozkład zgodny z hipotezą. W rozkładzie λ zakłada się, że dystrybuanta teoretyczna jest ciągła. Jeżeli nie jest ciągła - należy użyć testu χ^2. Parametry rozkładu teoretycznego powinny być znane, ale jeśli próba jest duża można je oszacować na jej podstawie.

W tym teście obliczamy bezwzględne wartości różnic

dystrybuant empirycznej i teoretycznej (dla prawej wartości skrajnej przedziału) i znajdujemy wartość D równą wartości największej różnicy pomiędzy dystrybuantami. Na tej podstawie obliczamy wartość statystyki λ i porównujemy ją z wartością krytyczną λ_α otrzymaną z tabeli rozkładu λ Kołmogorowa dla założonego poziomu istotności. Jeżeli $\lambda < \lambda_\alpha$ przyjmujemy hipotezę, że rozkłady są zgodne.

Przykład. Zbadano zdolność pobierania pokarmu prze pewien gatunek owada roślinożernego. Otrzymano następujące wyniki:

masa pokarmu zjedzonego w ciągu doby	liczba osobników
0-2	3
2-4	5
4-6	12
6-8	20
8-10	19
10-12	16
12-14	8
14-16	4

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że rozkład zdolności pobierania pokarmu jest normalny.

Rozwiązanie. Obliczamy średnią ważoną według wzoru:

$$\bar{x} = 1/n\sum(\mathring{x}_i - \bar{x})^2 n_i$$ [1]

Aby obliczyć średnią i odchylenie standartowe tworzymy tabelę:

[1] W przypadku gdy liczba przedziałów jest mała, a długość n przedziałów jest duża, obliczamy poprawkę na grupowanie odejmując od wartości pod pierwiastkiem wartość $1/2h^2$, gdzie h oznacza długość przedziału klasowego

$\mathring{x}_i$	n_i	$\mathring{x}_i n_i$	$(\mathring{x}_i - \bar{x})^2 n_i$ [2]
1	3	3	164.3
3	5	15	145.8
5	12	60	138.7
7	20	140	39.2
9	19	171	6.8
11	16	176	108.2
13	8	104	169.3
15	4	60	174.2
	87	729	946.5

$$\bar{x} = 729/87 = 8.38 \cong 8.4, \quad s = \sqrt{\frac{946.5}{87}} = 3.3$$

Po obliczeniu średniej i odchylenia standartowego obliczamy wartość zmiennej losowej:

$$z = \frac{\mathring{x}_i - \bar{x}}{s}$$

gdzie $\mathring{x}_i$ oznacza górną wartość w przedziale. Następnie z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego (tab. 2) odczytujemy wartości dystrybuanty $\emptyset(z)$ dla poszczególnych z i otrzymujemy dystrybuantę teoretyczną:

[2] Wartość przedziału klasowego obliczamy następująco: $3(1-8.4)^2$.

x_{i_o}	z	$\emptyset(z) = \hat{F}(x)$
2	-1.94	0.0262
4	-1.33	0.0918
6	-0.73	0.2327
8	-0.12	0.4522
10	0.48	0.6844
12	1.09	0.8621
14	1.70	0.9554
16	2.30	0.9893

Następnie tworzymy liczebności skumulowane n_{sk} aby potem dla każdego x_{i_o} obliczyć wartości empiryczne dystrybuanty Fn(x) przy użyciu wzoru:

$$Fn(x_k) = \frac{n_{sk}}{n}$$

gdzie $n_{sk} = \sum_{i \le k} n_i$ oznacza liczebność skumulowaną, a n - liczebność ogólną próby.

Tworzymy tabelę:

x_{i_o}	n_i	n_{sk}	Fn(x)[3]
2	3	3	0.0345
4	5	8	0.0920
6	12	20	0.2299
8	20	40	0.4598
10	19	59	0.6782
12	16	75	0.8621
14	8	83	0.9540
16	4	87	1.0000

Dla każdego x_{i_o} obliczamy bezwzględne wartości różnicy

[3] Wartość Fn(x) obliczamy dzieląc np. 3/87, 8/87 etc.

dystrybuant empirycznej Fn(x) i teoretycznej $\hat{F}(x)$. Szukamy największej wartości różnicy D:

$$D = \sup_x |Fn(x) - \hat{F}(x)|$$

Obliczenia wykonujemy w tabeli:

x_i	Fn(x)	$\hat{F}(x)$	$\lvert Fn(x) - \hat{F}(x)\rvert$
2	0.0345	0.0262	0.0083
4	0.0920	0.0918	0.0002
6	0.2299	0.2327	0.0028
8	0.4598	0.4522	0.0076
10	0.6782	0.6844	0.0062
12	0.8621	0.8621	0.0000
14	0.9540	0.9554	0.0014
16	1.0000	0.9893	0.0107 = D

D = 0.0107

Obliczamy $\lambda = d\sqrt{n} = 0.0107\sqrt{87} = 0.0998$

Wartość tą porównujemy z wartością krytyczną λ_α z tab. 3 dla $\alpha = 0.05$. Wartość $\lambda_\alpha = 1.3581$. Ponieważ $\lambda = 0.0107 < \lambda_\alpha = 1.3581$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że rozkład zdolności pobierania pokarmu jest normalny. Gdyby $\lambda \geq \lambda_\alpha$ hipotezę musielibyśmy odrzucić.

Piśmiennictwo: Neave, 1981; Gren, 1978; Bielecki, Jurkiewicz, Szymanowska, 1978; Massey, 1951; Kołmogorov, 1933, Smirnov, 1939; Muller, 1956.

III. TESTY ZGODNOSCI ROZKŁADU DWOCH PROB NIEZALEZNYCH

1. Test sumy rang Manna-Whitneya/Wilcoxona

Test służy do badania zgodności dwóch rozkładów empirycznych. Pobieramy próby losowe o liczebnościach n_1 i n_2. Wyniki z obu prób łącznie szeregujemy od najmniejszej do największej i numerujemy kolejno. Potem obliczmy sumę numerów (rang) T dla próby o mniejszej liczebności. Zakładamy hipotezę, że nie ma różnicy między rozkładami. W takim przypadku $T_1/T_2=$

n_1/n_2. W celu sprawdzenia hipotezy porównujemy otrzymaną sumę kolejności mniejszej próby z wartością tabelaryczną T przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Przykład. Zebrano mszyce należące do jednego gatunku z brzóz w dwóch parkach narodowych. Zmierzono długość czułków uzyskując następujące wyniki:

Park A: 62, 63, 59, 54, 65, 60, 62, 57,

Park B: 53, 58, 61, 62, 67, 57, 56, 58, 61, 63.

Przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że długość czułków u mszyc jest jednakowa w obu parkach.

Rozwiązanie. Dane porządkujemy według wartości rosnących, zaznaczając z której próby pochodzą i nadajemy im kolejne numery (rangi):

52	53	54	56	57	58	58	59	60	61	61	62	62
B	B	A	B	A	B	B	A	A	B	B	A	A
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	13

62	63	63	65	67
B	A	B	A	B
13	15.5	15.5	17	18

Dwie jednakowe wartości 58 mają numery kolejne ponieważ pochodzą z jednej próby. Dwie jednakowe wartości 63 mają rangę $\frac{15 + 16}{2}$ ponieważ pochodzą z dwóch różnych prób. Suma kolejności T_m mniejszej próby (park A) wynosi 83.5, a suma większej próby T_w wynosi 87.5. Suma $T_m + T_w = 171$. Sprawdzamy poprawność obliczenia sumy rang:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{18(18+1)}{2} = 171$$

Z tab. 4 odczytujemy wartość $T_\alpha = 53$ dla $n_1 = 8$ i $n_2 = 10$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Ponieważ $T_\alpha = 53 < T = 83.5$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Czasami wartości mniejszej próby są skupione na końcu szeregu. Wówczas obliczamy wartość $T' = n_1(n_1 + n_2 + 1) - T$ i porónujemy z wartością T_α.

Jeżeli wartość próby jest większa niż 20 wówczas obliczamy

wartość:

$$z = \frac{2T - n_1(n_1 + n_2 + 1)}{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) : 3}$$

Wzór ten można również zastosować do prób o mniejszej liczebności. Dla powyższego przykładu wartość z = 0.0296. Jeżeli wartość z_α odczytana z tab. 2 jest mniejsza lub równa wartości obliczonej - hipotezę zerową odrzucamy, a jeżeli $z_\alpha < z$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Ponieważ z_α = 1.64 przy poziomie istotności α= 0.05 jest większe od z = 0.0296 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza poprzedni wniosek. Długość czułków jest jednakowa w obu parkach.

Piśmiennictwo: STEEL, TORIE, 1981; WILCOXON, 1945; PUCHALSKI, 1980; SIEGEL, 1956; NORCLIFFE, 1986; MANN, WHITNEY, 1947; WHITE, 1952.

2. Test sumy rang W

Testu tego używamy dla porównania rozkładu 2 prób i ustalenia czy pochodzą z populacji o jednakowym rozkładzie.

Pierwszym krokiem w teście jest uporządkowanie danych według wartości rosnących i ponumerowanie kolejnymi numerami od początku i od końca szeregu. Przy parzystej liczbie prób numeracja zejdzie się w środku szeregu, a przy nieparzystej - środkowa wartość otrzyma największą rangę. Obliczamy sumy rang dla obu prób i porównujemy wynik z wartościaimi tabelarycznymi. Jeśli $W_{\alpha min} < W < W_{\alpha max}$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Przykład. Ustawiono 12 pułapek, w tym 7 na trawniku w parku, a 5 na trawniku przylegającym do głównej arterii komunikacyjnej miasta. Po 72 godzinach policzono znajdujące się w nich owady z rodziny biegaczowatych. Uzyskano następujące wyniki:

Trawnik A: 3, 6, 7 9, 16, 18, 19,

Trawnik B: 8, 11, 12, 13, 15.

Na poziomie istotności α = 0.05 zweryfikować hipotezę, że próby pochodzą z populacji o jednakowych rozkładach.
Rozwiązanie. Wyniki porządkujemy według wartoći rosnących i nadajemy im rangi:

A	A	A	B	A	B	B	B	B	A	A	A
3	6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19
1	2	3	4	5	6	6	5	4	3	2	1

Suma rang dla mniejszej próby wynosi

$$W = 4 + 6 + 6 + 5 + 4 = 25.$$

Z tab. 5 odczytujemy dolną granicę $W_{\alpha_{min}} = 11$ przy $P = 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$ i górną granicę $W_{A_{max}} = 24$ przy $\alpha = 0.05$ dla prób o liczebnościach $n_1 = 7$ i $n_2 = 5$. Ponieważ $W = 25 > W_{\alpha_{max}} = 24$ hipotezę odrzucamy. Próby pochodzą z różnych populacji (liczebność biegaczy na obu trawnikach nie jest jednakowa).

Piśmiennictwo: PUCHALSKI, 1980; ANSARI, BRADLEY, 1960.

3. Test serii

Z dwóch populacji o dowolnych rozkładach losujemy 2 próby: próbę A o liczebności n_1 i próbę B o liczebności n_2. Na podstawie wyników tych prób weryfikujemy hipotezę, że próby pochodzą z jednej populacji generalnej.

Wyniki obu prób ustawiamy w jeden ciąg rosnący oznaczając kolejne wartości odpowiednio literami A i B w zależności od tego z której próby pochodzą. Obliczamy liczbę serii u. Tworzymy lewostronny obszar krytyczny przy z góry założonym poziomie istotności. Jeżeli $u_\alpha \leq$ odrzucamy hipotezę, że rozkłady obu populacji są identyczne. Jeżeli $u > u_\alpha$ nie mamy podstaw do odrzucenia tej hipotezy.

Przykład. Z populacji owadów wybrano losowo po 15 osobników należących do 2 podgatunków. Zbadano liczbę zapłodnionych jaj składanych przez samicę w ciągu 1 dnia. Otrzymano następujące wyniki:

podgatunek A: 12, 20, 18, 7, 30, 32, 19, 28, 40, 27, 19, 10, 18, 20, 18,

podgatunek B: 15, 21, 17, 11, 50, 48, 32, 21, 17, 40, 36, 28, 15, 23, 14.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że różnica w ilości składanych jaj jest nieistotna.

Rozwiązanie. Tworzymy szereg liczbowy:

A	A	B	A	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	A	A
7	10	11	12	14	15	15	17	17	18	18	19	19	19	20	20
	B	B	B	A	A.	B	A	A	B	B	B	A	B	B	
	21	22	23	27	28	28	30	32	32	36	40	40	48	50	

Liczba serii $u_\alpha = 12$, $n_1(A) = 15$, $n_2(B) = 15$. Przy $\alpha = 0.05$ odczytujemy $u_\alpha = 11$ (tab. 1). Ponieważ $u = 12 > u_\alpha = 11$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy przy założonym poziomie istotności.

Przy większej liczebności prób, gdy n_1 i n_2 są większe niż 20 można zastosować aproksymację rozkładem normalnym (patrz p. I. Test serii jako test losowości próby).

Piśmiennictwo: GREŃ, 1978; SIEGEL, 1956; NORCLIFFE, 1986.

4. Test λ Kołmogorova-Smirnova

Przy użyciu testu λ Kołmogorova-Smirnova można porównywać dwie dystrybuanty empiryczne (z próby). Przyjmuje się przy tym założenie, że rozkłady mają charakter ciągły. W innym przypadku stosuje się statystykę χ^2. W celu obliczenia statystyki λ Kołmogorowa-Smirnova obliczamy dla obu dystrybuant liczebności empiryczne korzystając z wzorów:

$$Fn_1(x) = \frac{n_{1,sk}}{n_1} \qquad Fn_2(x) = \frac{n_{2,sk}}{n_2}$$

gdzie $n_{1,sk}$ i $n_{2,sk}$ oznaczają liczebności skumulowane w obu grupach. Następnie obliczamy bezwzględne różnice między wartościami tych dystrybuant $|Fn_1(x) - Fn_2(x)|$ po czym odszukujemy największą różnicę wartości tych dystrybuant

$$D = \sup_x |Fn_1(x) - Fn_2(x)$$

Obliczamy:

$$\lambda = D\sqrt{n}$$

gdzie $n = \dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$

Statystyka λ ma asymptotyczny rozkład λ Kołmogorowa.

Przykład. Wylosowano dwie próby plastra z uli 2 gatunków pszczół. Pomiary wykazały następujące rozkłady średnicy tych komórek:

Srednica	Liczba komórek z ula pszczół	
	gatunku A	gatunku B
5.0	2	0
5.1	4	3
5.2	5	6
5.3	8	10
5.4	14	14
5.5	12	18
5.6	8	16
5.7	5	14
5.8	2	12
5.9	-	7

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że u obu gatunków pszczół rozkłady średnic komórek w plastrach są takie same.

Rozwiązanie. Tworzymy tabelę:

$\mathring{x}_i$	$n_{1,sk}$	$n_{2,sk}$	$Fn_1(x)$	$Fn_{2,sk}$	$\lvert Fn_1(x) - Fn_2(x)\rvert$
5.0	2	0	0.0333	0.0000	0.0333
5.1	6	3	0.1000	0.0300	0.0700
5.2	11	9	0.1833	0.0900	0.0933
5.3	19	19	0.3167	0.1900	0.1267
5.4	33	33	0.5500	0.3300	0.2200
5.5	45	51	0.7500	0.5100	0.2400 = D
5.6	53	67	0.8833	0.6700	0.2133
5.7	58	81	0.9667	0.8100	0.1567
5.8	60	93	1.0000	0.9300	0.0700
5.9	60	100	1.0000	1.0000	0.0000

$$\lambda = 0.2400 \frac{60 \times 100}{60 + 100} = 1.4697$$

Z tab. 3 odczytujemy $\lambda_\alpha = 1.3581$. Ponieważ

$= 1.4697 > \lambda_{\alpha} = 1.3581$ przy $\alpha = 0.05$ hipotezę odrzucamy. Srednice komórek w plastrach obu gatunków pszczół różnią się od siebie istotnie.

Piśmiennictwo: NEAVE, 1981; GREN, 1978; BIELECKI, JURKIEWICZ, SZYMANOWSKA, 1978; NORCLIFFE, 1986; MASSEY, 1951, 1952; SMIRNOV, 1939, 1948; KOŁMOGOROV, 1933; MULLER, 1956; BIRBAUM, HALL, 1960.

5. Test mediany

W tym teście sprawdzamy czy próby pochodzą z jednej populacji. Najpierw obliczamy liczbę wyników powyżej i poniżej mediany w obu grupach oddzielnie. Jeżeli próby pochodzą z jednej populacji wówczas liczba wyników powyżej i poniżej mediany powinna być podobna w obu próbkach. Liczebności zestawia się w tablicę 2 x 2 i oblicza wartość statystki χ^2 z 1 stopniem swobody. Rozkład populacji może być dowolny.

Przykład. W grądzie i borze sosonowym pobrano po 15 próbek ściółki glebowej. Po wypłoszeniu zwierząt w aparacie Tullgrena zbadano biomasę owadów. Otrzymano następujące dane:

grąd: 20.1 18.6 26.2 33.1 30.0 27.3 21.5 23.9 25.1 28.4 29.2 34.8 30.3 27.1 26.0,

bór sosnowy: 26.4 24.8 30.9 33.6 32.5 29.6 27.8 36.7 34.9 36.9 34.3 33.8 29.7 30.1 26.1.

Przy $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że różnica w żyzności środowisk wyrażona biomasą owadów jest nieistotna.

Rozwiązanie. Tworzymy rosnący szereg liczbowy z wyników obu prób:

18.6	27.1	30.9
20.1	27.3	32.5
21.5	27.8	33.1
23.9	28.4	33.6
24.8	29.2	33.8
25.1	29.6	34.3
26.0	29.7	34.8
26.1	30.0	34.9
26.2	30.1	36.7
26.4	30.3	36.9

Obliczamy medianę:

$$Me = \frac{29.2 + 29.6}{2} = 29.4$$

Obliczamy liczbę wartości mniejszych i większych od mediany oddzielnie dla obu prób i zestawiamy w tablicę 2 x 2:

	grąd	bór	Razem
większe od mediany	4(a)	11(b)	15
mniejsze od mediany	11(c)	4(d)	15
Razem	15	15	30

Obliczamy wartość statystyki χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(ad - bc - 0.5n)^2 n}{(a + b)(a + c)(a + d)(c + d)}$$

Przy $\nu = 1$ stopniu swobody i $\alpha = 0.05$ odczytujemy wartość krytyczną $\chi^2_\alpha = 3.84$ (tab. 6).

Ponieważ $\chi^2 = 8.53 > \chi^2_\alpha = 3.84$ odrzucamy hipotezę o nieistotnej różnicy między środowiskami.

Piśmiennictwo: Gren, 1978; Bielecki, Jurkiewicz, Szymanowska, 1978; Mood, 1950.

IV. TESTY ZGODNOSCI ROZKŁADU DWOCH PRÓB SPAROWANYCH

1. Test znaków

Test ten służy do porównywania dwóch szeregów, w których dane jednego szeregu tworzą pary z danymi drugiego szeregu. Rozkład populacji, z których pobrano próby jest obojętny. Zakładamy, że nie ma różnicy pomiędzy rozkładem danych pierwszej populacji i rozkładem danych drugiej populacji. Badamy znak różnicy $x_i - y_i$. Jeżeli $x = y$ takiej pary nie bierzemy pod uwagę. Jeżeli dane pochodzą z jednej populacji liczba plusów powinna równoważyć liczbę minusów. Mniejszą z tych wartości porównujemy z tablicami. Jeżeli obliczone r jest mniejsze od r_α odrzucamy hipotezę przy założonym poziomie

istotności α. Hipoteza ta może być zweryfikowana przy użyciu statystyki χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2}$$

gdzie n_1 i n_2 oznaczają liczbę plusów i minusów. Poprawka na ciągłość rozkładu może być wprowadzona przez zmianę licznika powyższego równania na:

$$(|n_1 - n_2| - 1)^2$$

Test znaków nie może być stosowany jeżeli liczba par jest mniejsza od 6.

Przykład. Zbadano ciężar 20 ryjkowców. Roślinę żywicielską opryskano 5% roztworem taniny i po 10 dniach ponownie zbadano ciężar poszczególnych osobników. Uzyskano następujące rezultaty:

nr ryjkowca	ciężar przed opryskiwaniem	ciężar po opryskiwaniu	znak różnicy
1	2.35	2.11	+
2	2.38	2.14	+
3	2.65	2.67	–
4	2.42	2.40	+
5	2.43	2.15	+
6	2.51	2.54	–
7	2.58	2.36	+
8	2.59	2.09	+
9	2.45	2.19	+
10	2.73	2.62	+
11	2.61	2.68	–
12	2.61	2.53	+
13	2.41	2.58	–
14	2.45	2.37	+
15	2.65	2.54	+
16	2.37	2.42	–
17	2.76	2.65	+
18	2.51	2.71	–
19	2.46	2.21	+
20	2.61	2.32	+

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że

ciężar ryjkowców nie zmienia się pod wpływem taniny.

Rozwiązanie. Łącznie stwierdzono 14 plusów i 6 minusów, czyli r = 6, n = 20. Z tab. 7 przy α = 0.05 odczytujemy r_α = 5. Ponieważ r = 6 > r_α = 5 nie możemy odrzucić hipotezy o jednakowym ciężarze przed i po opryskiwaniu.

Dla tego przykładu

$$\chi^2 = \frac{(14 - 6)^2}{14 + 6} = 3.2$$

Ponieważ χ^2 = 3.2 < χ^2 = 3.84 odczytanego z tab. 6 przy ν = 1 stopniu swobody i α = 0.05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza wcześniejsze wyliczenie.

Piśmiennictwo: Dixon, Massey, 1969; Steel, Torie, 1981.

2. Test rangowanych znaków Wicoxona

Test ten jest podobny do testu znaków, jednak oprócz znaków różnicy wyników tworzących parę uwzględnia również wielkość tej różnicy. Zakłada się, że rozkład populacji jest ciągły. Testuje się hipotezę, że dwie próby pochodzą z jednej populacji.

Obliczamy różnice wyników obu prób dla wszystkich par, porządkujemy wartości bezwzględne tych różnic od najmniejszej do największej, oznaczając je (rangując) kolejnymi numerami. Numery (rangi) zapisujemy w 2 grupach oddzielnie dla różnic dodatnich oraz ujemnych. Sumując je uzyskujemy sumę T^+ dla różnic dodatnich i T^- dla różnic ujemnych. Mniejsza z tych różnic jest statystyką T o rozkładzie podanym w tablicach, przy założeniu prawdziwości hipotezy.

Jeśli $T \leq T_\alpha$ przy założonym poziomie istotności α hipotezę odrzucamy. Jeśli $T > T_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Jeśli występuje kilka jednakowych różnic nadajemy im wszystkim jednakowy numer będący średnią arytmetyczną numerów, które by miały gdyby nie były jednakowe.

Gdy n > 25 można korzystać z granicznego rozkładu normalnego, gdyż statystyka T ma rozkład:

$$z = \frac{(T - \mu_T)}{\sigma_T}$$

gdzie: $\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$ $\sigma_T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$

a n oznacza liczbę par. w tym przypadku do testowania hipotezy używamy tab. 2.

Przykład. Zbadano wydajność 14 znakowanych pszczół przed i po opryskiwaniu plantacji herbicydami. Uzyskano następujące wyniki:

przed opryskiwaniem: 52, 220, 125, 84, 150, 92, 94, 125, 78,
po opryskiwaniu 68, 242, 120, 107, 159, 80, 115, 162, 90,

265, 187, 113, 63, 146,
241, 197, 101, 85, 180.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że wydajność pszczół przed i po opryskiwaniu jest taka sama.

Rozwiązanie. Obliczamy różnice i nadajemy im rangi:

$x_i - y_i$	T_i^+	T_i^-
16	7	
22	9.5	
-5		1
23	11	
9	2	
-12		5
21	8	
37	14	
12	5	
-24		12
10	3	
-12		5
22	9.5	
34	13	
82	23	

$T^+ = 82$, $T^- = 23$. Liczba mniejsza jest szukaną wartością T. Sprawdzamy poprawność obliczeń:

$$T^{+} + T^{-} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{14 \times 15}{2} = 105$$

gdzie n oznacza liczbę par. Przy poziomie istotności α = 0.05 i n = 14 T_{α} = 21 (tab. 8). Ponieważ T = 23 > T_{α} = 21 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że wydajność pszczół jest taka sama przed i po opryskiwaniu.

Piśmiennictwo: STEEL, TORIE, 1981; GREN 1978; NEAVE, 1981; WILCOXON, 1945, 1947, 1949.

V. TESTY ZGODNOSCI ROZKŁADU KILKU PROB

1. Test sumy rang Kruskala-Wallisa (dla nierównych prób)

Testu używa się dla populacji o rozkładach ciągłych. Wszystkie wartości uzyskane w próbach ustawia się według kolejności od najmniejszej do największej i nadaje im kolejne numery (rangi). Następnie sumujemy rangi dla każdej próby oddzielnie. jeśli próby pochodzą z 1 populacji to sumy rang dla poszczególnych prób powinny być podobne.

Test ten może być używany dla dwóch prób. W takim przypadku używamy tab. 4 niezależnie od liczebności próby. Najczęściej test ten jest używany do porównywania kilku prób. W przypadku porównywania 3 - 5 prób o niewielkich liczebnościach korzystamy z tab. 9. W przypadku porównywania co najmniej 3 prób o dużej liczebności statystyka H użyta do budowy obszaru krytycznego ma rozkład graniczny χ^2 z ν = k - 1 stopniami swobody, gdzie k oznacza liczbę porównywanych prób. Gdy liczebność prób jest duża można z rozkładu χ^2 wyznaczyć prawostronny obszar krytyczny dla testu. Weryfikujemy hipotezę, że wszystkie badane próby pochodzą z jednej populacji. Aby ją zweryfikować wyznaczamy wartość statystyki:

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i \le i} \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

gdzie n oznacza łączną liczebność w próbach, T_i oznacza sumę rang dla próby (i = 1, 2, ..., k), a n_i - liczebność próby. Z tab. 6 dla α = 0.05 i ν = k - 1 stopni swobody odczytujemy wartość statystyki χ^2_{α}. Jeżeli $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}$ hipotezę odrzucamy, a jeżeli $\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$ wówczas nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Przykład. Z trzech środowisk wybrano odpowiednio 10, 8 i 12 żuków i zmierzono długość fali świetlnej odbitej od ich pokryw. Otrzymano następujące wyniki:

środowisko A: 420, 560, 600, 490, 550, 570, 340, 480, 510, 460,

środowisko B: 400, 420, 580, 470, 470, 500, 520, 530,

środowisko C: 450, 700, 630, 590, 420, 590, 610, 540, 740, 690, 540, 670.

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że długość fali odbitego światła we wszystkich środowiskach jest jednakowa.

Rozwiązanie. Ogólna liczebność $n = n_1 + n_2 + n_3 = 30$. Wynikom nadajemy rangi oddzielnie dla każdego środowiska otrzymując T_1, T_2, i T_3.

A	ranga	B	ranga	C	ranga
420	4	400	2	450	6
560	19	420	4	700	29
600	24	580	21	630	26
490	11	470	8.5	590	22.5
550	18	470	8.5	420	4
570	20	500	12	590	22.5
340	1	520	14	610	25
480	10	530	15	540	16.5
510	13			740	30
460	7			690	28
				540	16.5
				670	27

$T_1 = 127$ $T_2 = 85$, $T_3 = 253$

Sprawdzamy poprawność obliczenia:

$$T_1 + T_2 + T_3 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{31 \times 31}{2} = 465$$

Obliczamy wartość statystyki:

$$H = \frac{12}{30 \times 31}\left(\frac{127^2}{10} + \frac{85^2}{8} + \frac{253^2}{12}\right) - 3 \times 31 = 8.2917$$

Z tab. 6 odcztujemy wartość $\chi^2_\alpha = 5.991$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i $\nu = k - 1 = 2$ stopniach swobody. Ponieważ $\chi^2 = 8.2917 > \chi^2_\alpha = 5.991$ hipotezę odrzucamy. Długość fali światła odbitej od pokryw nie jest jednakowa w badanych środowiskach.

Piśmiennictwo: STEEL, TORIE, 1981; NEAVE, 1981, GREN, 1978, PUCHALSKI, 1980; KRUSKAL, WALLLIS 1952.

2. Test sumy rang W (dla tablicy r x k)

Test ten stosujemy dla więcej niż dwóch prób, gdy wyniki są uporządkowane według dwóch kryteriów w r rzędach i k kolumnach. Weryfikujemy dwie hipotezy: A - zakładającą, że próby uporządkowane według rzędów pochodzą z populacji o jednakowych rozkładach oraz B - zakładającą, że próby uporządkowane według kolumn pochodzą z populacji o jednakowych rozkładach.

Weryfikacja hipotezy A. Numerujemy kolejno dane w każdej z kolumn według wartości rosnących i sumujemy numery rzędami. Jeżeli hipoteza jest prawdziwa wówczas suma numerów w każdym rzędzie jest podobna. Obliczamy W:

$$W = \frac{12\Sigma d^2}{k^2(r^3 - r)}$$

gdzie d oznacza różnicę między sumą numerów w rzędzie a wartością teoretyczną tej sumy, którą obliczamy ze wzoru:

$$\frac{k(r + 1)}{2}$$

gdzie k - oznacza liczbę kolumn, a r - liczbę rzędów.

Weryfikacja hipotezy B. Numerujemy kolejno dane w każdym z rzędów i sumujemy rangi kolumnami, a następnie obliczamy W:

$$W = \frac{12\Sigma d^2}{r^2(k^3 - k)}$$

gdzie d oznacza różnicę między sumą numerów w kolumnie, a wartością teoretyczną tej sumy obliczoną z wzoru:

$$\frac{r(k + 1)}{2}$$

Wyniki obliczeń porównujemy z wartością tabelaryczną W_α przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ (tab. 10). Jeżeli $W < W_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Jeżeli $W \geq W_\alpha$ hipotezę odrzucamy.

Jeżeli mamy więcej k lub r niż podano w tab. 10 możemy skorzystać z testu:

$$\chi^2 = Wr(k - 1) \text{ - dla kolumn i}$$

$$\chi^2 = Wk(r - 1) \text{ - dla rzędów}$$

Przykład. Mszyce z gatunku polifagicznego zebrano z 6 gatunków traw rosnących w 5 różnych środowiskach. Wyniki pomiarów długości ogonka zebrano w tabeli (każdy wynik jest średnią 10 pomiarów):

Gatunek trawy	Srodowisko				
	A	B	C	D	E
a	19.9	15.0	18.1	14.6	16.6
b	18.5	16.1	16.7	14.8	15.5
c	18.0	18.3	17.1	17.8	13.3
d	17.9	15.8	15.4	17.7	16.1
e	14.6	15.3	18.0	13.7	15.8
f	18.2	16.8	17.3	18.3	16.7

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezy: A - zakładającą, że mszyce na różnych gatunkach trawy mają jednakową długość ogonka, B - zakładającą, że mszyce w różnych środowiskach mają jednakową długość ogonka.

Rozwiązanie. Weryfikacja hipotezy A. Numerujemy kolejno wartości każdej z kolumn i sumujemy numery rzędami:

	A	B	C	D	E	Suma
a	6	1	6	2	5	20
b	5	4	2	3	2	16
c	3	6	3	5	1	18
d	2	3	1	4	4	14
e	1	2	5	1	3	12
f	4	5	4	6	6	25
		Suma		105		

Sprawdzamy sumowanie:

$$k\frac{r(r+1)}{2} = 5\frac{6(6+1)}{2} = 105$$

Obliczamy wartość teoretyczną sumy w rzędzie:

$$k\frac{r+1}{2} = \frac{5 \times 7}{2} = 17.5$$

Obliczamy: $\Sigma d^2 = (20 - 17.5)^2 + (16 - 17.5)^2 + (18 - 17.5)^2 + (14 - 17.5)^2 + (12-17.5)^2 + (25 - 17.5)^2 = 107.5$

Obliczamy W:

$$W = \frac{12 \times 107.5}{25(6^3 - 6)} = 0.246$$

Z tablicy 10 odczytujemy wartość $W_\alpha = 0.41$ przy poziomie istotności 0.05 dla r = n = 6 i k = m = 5. Ponieważ W = 0.246 < W = 0.41 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy A, że długość ogonka mszyc na różnych gatunkach traw jest jednakowa.

Weryfikacja hipotezy B. Numerujemy kolejno wartości w każdym rzędzie i sumujemy nr kolumnami:

	A	B	C	D	E	Suma
a	5	2	4	1	3	
b	5	3	4	1	2	
c	4	5	2	3	1	
d	5	2	1	4	3	
e	2	3	5	1	4	
f	4	2	3	5	1	
Suma	25	17	19	15	14	90

Sprawdzamy sumowanie:

$$r\frac{k(k+1)}{2} = 6\frac{5(5+1)}{2} = 90$$

Obliczamy wartość teoretyczną sumy numerów w kolumnie:

$$r\frac{(k+1)}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$

Obliczamy $\Sigma d^2 = (25 - 18)^2 + (17 - 18)^2 + (19 - 18)^2 + (15 - 18)^2 + (14 - 18)^2 = 76$

Obliczamy W:

$$W = \frac{12 \times 76}{6^2(5^3 - 5)} = 0.211$$

Z tab. 10 odczytujemy wartość $W_\alpha = 0.37$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i $r = m = 6$ i $k = n = 5$.

Ponieważ $W = 0.211 < W_\alpha = 0.37$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy B, że długość ogonka mszyc jest jednakowa w badanych środowiskach.

Weryfikacja hipotez A i B przy użyciu testu χ^2.

Hipoteza A:

$$\chi^2 = Wk(r - 1) = 0.246 \times 5(6 - 1) = 6.15$$

$\chi^2_\alpha = 11.070$ przy $\alpha = 0.05$ i $\nu = r - 1 = 6 - 5 = 1$ stopniu swobody (tab. 6). Ponieważ $\chi^2 = 6.15 < \chi^2_\alpha = 11.070$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza poprzednie

obliczenie.

Hipoteza B:

$$\chi^2 = Wr(k - 1) = 0.211 \times 6(5 - 1) = 5.064$$

$\chi^2_\alpha = 9.488$ przy $\alpha = 0.05$ i $\nu = k - 1 = 5 - 1 = 4$ stopniach swobody (tab. 6). Ponieważ $\chi^2 = 5.064 < \chi^2_\alpha = 9.488$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy co potwierdza poprzednie obliczenie.

Piśmiennictwo: PUCHALSKI, 1980; ANSARI, BRADLEY, 1960.

3. Test Friedmana (dla tablicy r x k)

Test służy do porównywania więcej niż 2 prób, gdy wyniki są uporządkowane według 1 kryterium w k kolumnach o n powtórzeniach lub gdy są uporządkowane według 2 kryteriów w tablicy r x k.

Używamy statystyki S:

$$S = \frac{12}{rk(k + 1)} \Sigma d_i^2 - 3r(k + 1)$$

gdzie r oznacza liczbę rzędów lub powtórzeń, k - liczbę kolumn, Σd_i^2 jest sumą kwadratów sum rang z każdej kolumny. Statystyka S ma rozkład graniczny χ^2, przy $\nu = k - 1$ stopni swobody.

Przykład. Wykonamy obliczenia dla przykładu użytego przy omówieniu testu sumy rang W (str. 127).

Dla hipotezy A:

$$\chi^2 = \frac{12}{5 \times 6 \times 7}\left(20^2 + 16^2 + \ldots + 25^2\right) - 3 \times 5 \times 7 = 6.1429$$

co jest zgodne z poprzednim wyliczeniem.

Dla hipotezy B:

$$\chi^2 = \frac{12}{6 \times 5 \times 6}\left(25^2 + \ldots + 14^2\right) - 3 \times 6 \times 6 = 5.0667$$

co jest zgodne z wcześniej uzyskaną wartością.

Piśmiennictwo: STEEL, TORIE, 1981; FRIEDMAN, 1937

VI. TEST ISTOTNOSCI ROZNIC DLA KILKU PROB

Test ten przeprowadza się w następujący sposób. W każdej

kolumnie wyznaczamy wartość maksymalną, następnie numerujemy próby kolejno według wartości maksymalnych od najwyższej do najniższej. Następnie porównujemy obserwację o najwyższej wartości maksymalnej z obserwacją o najniższej wartości maksymalnej, zaliczając liczbę obserwacji w próbie 1 większych od wartości maksymalnej w próbie ostatniej. Otrzymujemy liczbę m. Wynik m porównujemy przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ z wartością tabelaryczną m_α. Jeżeli $m \geq m_\alpha$ przy danym poziomie istotności hipotezę odrzucamy. Jeśli $m < m_\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Jeżeli hipotezę odrzucimy wówczas wówczas porównujemy próbę nr 1 z próbą przedostatnią etc.

Przykład. Wybrano próbkę chrząszczy. Rośliny żywicielskie opryskano 4 różnymi aminokwasami i zbadano ubytek ciężaru liści po 24 godzinach, określając w ten sposób intensywność żerowania. Uzyskano następujące wyniki:

Aminokwas A	Aminokwas B	Aminokwas C	Aminokwas D
44	42	72	62
58	44	65	58
62	60	61	49
51	49	61	44
55	49	63	61
57	52	56	62
34	54	76	42
48	55	71	56
51	47	56	62
46	44	69	44

Przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że aminokwasy mają jednakowy wpływ na intensywność żerowania. Czytelnik może zastosować jeden z testów opisanych w pkt. 5. Po zweryfikowaniu hipotezy i odrzuceniu jej przy pmocy testu m określamy, które z aminokwasów wpływają na intensywność żerowania.

Rozwiązanie. Znajdujemy wartości maksymalne dla poszczególnych aminokwasów:

Aminokwas A - 62
Aminokwas B - 60
Aminokwas C - 76
Aminokwas D - 62

Porównujemy C i B. W próbie C jest 8 wartości większych niż wartość maksymalna w próbie B, a zatem m = 8. Ponieważ m_{α} = 6 < od m = 8 dla n = 10 i k = 3 przy α = 0.05 (tab. 11) hipotezę odrzucamy.

Porównujemy C i (A, D). W próbie C jest 6 wartości większych niż wartość maksymalna (A, D), a zatem m = 6. Ponieważ m_{α} = 6 jest równe m = 6 dla n = 10 i k = 3 przy α = 0.05 hipotezę odrzucamy. Aminokwas C ma istotnie różny wpływ od grupy 3 aminokwasów (A, B, D) o podobnym działaniu.

Piśmiennictwo: PUCHALSKI, 1980; CONOVER, 1968.

VII. PIŚMIENNICTWO

ANSARI A. R., BRADLEY R. A., 1960. Rans-sum tests for dispersion. Ann. Math. Stat., 4: 18-27.

BIELECKI J., JURKIEWICZ B., SZYMAŃSKA Z., 1978. Zbiór zadań ze statystyki ogólnej i matematycznej. PWN, Warszawa, 347 pp.

BIRNBAUM Z. W., HALL R. A., 1960. Small sample distribution for multisample distribution of the SMIRNOV type. Ann. Math. Stat., 31: 710-720.

CONOVER W. J., 1968. Two k-samples slippage tests. J. Amer. Stat. Assoc., 63: 18-37.

DIXON W. J., MASSEY F. J., 1969. Introduction to statistical analysis. McGraw-Hill, New York, 127 pp.

FRIEDMAN F. J., 1952. Distribution table for the deviation between two sample cumulatives. Ann. Math. Stat., 23: 435-441.

GREN J., 1978. Statystyka matematyczna. Modele i zadania. PWN, Warszawa, 363 pp.

KOŁMOGOROV A. N., 1933. Sulla determinazione empiriica di una legge di distribuzione. Giorn. 1st. Ital. Attuari., 4: 83-91.

KRUSKAL W. H., WALLIS W. A., 1952. Use ranks in one-criterion variance analysis. J. Amer. Stat. Assoc., 47: 583-621

MANN H. B., WHITNEY D. R., 1947. On a test of whether one of two random varaibles is stochastically larger then other. Ann. Math. Stat., 18: 50-60.

MASSEY F. J., 1951. The KOŁMOGOROV-SMIRNOV test for goodness of fit. J. Amer. Stat. Assoc., 46: 70.

MASSEY F. J., 1952. Distribution table for the deviation between two samples cumulatives. Ann. Math. Stat., 23: 435-441.

MOOD A. M., 1950. Introduction to the theory of statistics. McGraw-Hill, New York, 235 pp.

MULLER L. H., 1956. Table of percentage points of KOLMOGOROV statistics. J. Amer. Stat. Assoc., 51: 111-121.

NEAVE H. R., 1981. Statistics tables for mathematicians, engineers, economists and the behavioural and management sciences. George Allen and Unwin, London, 88 pp.

NORCLIFFE G. B., 1986. Statystyka dla geografów. PWN, Warszawa, 258 pp.

PUCHALSKI T., 1980. Statystyka. Wykład podstawowych zagadnień. PWN, Warszawa, 377 pp.

SIEGEL S., 1956. Nonparametric statistics for the behavioural sciences. McGraw-Hill, New York, 186 pp.

SMIRNOV N. V., 1939. Estimate of deviation between empirical distribution functions in two independent samples. Bull. Mosc. Univ., 2: 3-16.

SMIRNOV N. V., 1948. Tables for estimating the goodnes of fit of empirical distribution. Ann. Math. Stat., 19: 280-281.

STEEL R. G. D., TORIE J. H., 1981. Principles and procedures of statistics. A biometrical approach. McGraw-Hill, London, 633 pp.

WHITE C., 1952. The use of ranks in a test of significance for computing two treatments. Biom., 8: 33-41.

WILCOXON F., 1945. Individual comparisions by ranking methods. Biom. Bull., 1:80-83.

WILCOXON F., 1947. Probability tables for individual comparisions by ranking methods. Biom. Bull., 3: 119-122.

WILCOXON F., 1949. Some rapid approximate statistical procedures. Amer. Cyan. Comp., Stamford, 32 pp.

Tab. 1 Wartości krytyczne u_α w teście serii

$\alpha = 0.05$

n_2 \ n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																			
3																			
4			2																
5		2	2	3															
6		2	3	3	3														
7		2	3	3	4	4													
8	2	2	3	3	4	4	5												
9	2	2	3	4	4	5	5	6											
10	2	3	3	4	5	5	6	6	6										
11	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7									
12	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8								
13	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9							
14	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10						
15	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11					
16	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	11				
17	2	3	4	5	6	6	6	8	9	9	10	10	11	11	12	12			
18	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13		
19	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	13	14	14	
20	2	3	4	5	6	7	8	9	9	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15

$\alpha = 0.95$

n_2 \ n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	4																		
3	5	6																	
4	5	6	7																
5	5	7	8	8															
6	5	7	9	9	10														
7	5	7	8	9	10	11													
8	5	7	9	10	11	12	12												
9	5	7	9	10	11	12	13	13											
10	5	7	9	10	11	12	13	14	15										
11	5	7	9	11	12	13	14	14	15	16									
12	5	7	9	11	12	13	14	15	16	16	17								
13	5	7	9	11	12	13	14	15	16	17	17	18							
14	5	7	9	11	12	13	15	16	16	17	18	19	19						
15	5	7	9	11	13	14	15	16	17	18	18	19	20	20					
16	5	7	9	11	13	14	15	16	17	18	19	20	20	21	22				
17	5	7	9	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21	21	22	23			
18	5	7	9	11	13	14	15	17	18	19	20	20	21	22	23	23	24		
19	5	7	9	11	13	14	15	17	18	19	20	21	22	22	23	24	24	25	
20	5	7	9	11	13	14	16	17	18	19	20	21	22	23	24	24	25	26	26

Tab. 2 Dystrybuanta rozkładu normalnego $\phi(z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557
0.2	.5793	.5832	.5861	.5910	.5948
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7398
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988
1.4	.91924	.92073	.92220	.92354	.92507
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98645
2.3	.98928	.98959	.98983	$.9^{2}0097$	$.9^{2}0358$
2.4	$.9^{2}1809$	$.9^{2}2024$	$.9^{2}2240$	$.9^{2}2451$	$.9^{2}2656$
2.5	$.9^{2}3790$	$.9^{2}3963$	$.9^{2}4132$	$.9^{2}4297$	$.9^{2}4457$
2.6	$.9^{2}5339$	$.9^{2}5473$	$.9^{2}5604$	$.9^{2}5731$	$.9^{2}5844$
2.7	$.9^{2}6533$	$.9^{2}6636$	$.9^{2}6736$	$.9^{2}6833$	$.9^{2}6928$
2.8	$.9^{2}7445$	$.9^{2}7523$	$.9^{2}7599$	$.9^{2}7673$	$.9^{2}7744$
2.9	$.9^{2}8134$	$.9^{2}8193$	$.9^{2}8250$	$.9^{2}8305$	$.9^{2}8359$
3.0	$.9^{2}8659$	$.9^{2}8694$	$.9^{2}8736$	$.9^{2}8777$	$.9^{2}8817$
3.1	$.9^{3}0324$	$.9^{3}0646$	$.9^{3}0957$	$.9^{3}1260$	$.9^{3}1553$
3.2	$.9^{3}3129$	$.9^{3}3363$	$.9^{3}3590$	$.9^{3}3810$	$.9^{3}4002$
3.3	$.9^{3}5166$	$.9^{3}5335$	$.9^{3}5499$	$.9^{3}5658$	$.9^{3}5811$
3.4	$.9^{3}6631$	$.9^{3}6572$	$.9^{3}6869$	$.9^{3}6982$	$.9^{3}7091$

c. d. n.

Tab. 2 c. d.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
3.5	$.9^{3}7674$	$.9^{3}7759$	$.9^{3}7842$	$.9^{3}7922$	$.9^{3}7999$
3.6	$.9^{3}8409$	$.9^{3}8469$	$.9^{3}8527$	$.9^{3}8583$	$.9^{3}8637$
3.7	$.9^{3}8922$	$.9^{3}8964$	$.9^{4}0039$	$.9^{4}0426$	$.9^{4}0799$
3.8	$.9^{4}2765$	$.9^{4}3052$	$.9^{4}3327$	$.9^{4}3593$	$.9^{4}3848$
3.9	$.9^{4}5190$	$.9^{4}5385$	$.9^{4}5573$	$.9^{4}5753$	$.9^{4}5926$
4.0	$.9^{4}6833$	$.9^{4}6964$	$.9^{4}7090$	$.9^{4}7211$	$.9^{4}7327$
4.1	$.9^{4}7934$	$.9^{4}8022$	$.9^{4}8106$	$.9^{4}8186$	$.9^{4}8263$
4.2	$.9^{4}8665$	$.9^{4}8723$	$.9^{4}8778$	$.9^{4}8832$	$.9^{4}8882$
4.3	$.9^{5}1460$	$.9^{5}1837$	$.9^{5}2109$	$.9^{5}2545$	$.9^{5}2876$
4.4	$.9^{5}4587$	$.9^{5}4831$	$.9^{5}065$	$.9^{5}5288$	$.9^{5}5502$
4.5	$.9^{5}6602$	$.9^{5}6759$	$.9^{5}6908$	$.9^{5}7051$	$.9^{5}7187$
4.6	$.9^{5}7888$	$.9^{5}7987$	$.9^{5}8081$	$.9^{5}8172$	$.9^{5}8258$
4.7	$.9^{5}8699$	$.9^{5}8761$	$.9^{5}8821$	$.9^{5}8877$	$.9^{5}8931$
4.8	$.9^{6}2067$	$.9^{6}2453$	$.9^{6}2822$	$.9^{6}3173$	$.9^{6}3508$
4.9	$.9^{6}5208$	$.9^{6}5446$	$.9^{6}5673$	$.9^{6}5889$	$.9^{6}6094$

c. d. n.

Tab. 2 c. d.

z	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8944	.8962	.8989	.8997	.90147
1.3	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	$.9^{2}0613$	$.9^{2}0863$	$.9^{2}1106$	$.9^{2}1344$	$.9^{2}1576$
2.4	$.9^{2}2857$	$.9^{2}3053$	$.9^{2}3244$	$.9^{2}3431$	$.9^{2}3613$
2.5	$.9^{2}4614$	$.9^{2}4766$	$.9^{2}4915$	$.9^{2}5060$	$.9^{2}5201$
2.6	$.9^{2}5975$	$.9^{2}6093$	$.9^{2}6207$	$.9^{2}6319$	$.9^{2}6427$
2.7	$.9^{2}7020$	$.9^{2}7110$	$.9^{2}7197$	$.9^{2}7282$	$.9^{2}7365$
2.8	$.9^{2}7814$	$.9^{2}7882$	$.9^{2}7948$	$.9^{2}8012$	$.9^{2}8074$
2.9	$.9^{2}8411$	$.9^{2}8462$	$.9^{2}8511$	$.9^{2}8559$	$.9^{2}8605$
3.0	$.9^{2}8856$	$.9^{2}8893$	$.9^{2}8930$	$.9^{2}8965$	$.9^{2}8999$
3.1	$.9^{3}1836$	$.9^{3}2112$	$.9^{3}2378$	$.9^{3}2636$	$.9^{3}2886$
3.2	$.9^{3}4230$	$.9^{3}4429$	$.9^{3}4623$	$.9^{3}4810$	$.9^{3}4991$
3.3	$.9^{3}5959$	$.9^{3}6103$	$.9^{3}6242$	$.9^{3}6376$	$.9^{3}6505$
3.4	$.9^{3}7197$	$.9^{3}7299$	$.9^{3}7398$	$.9^{3}7493$	$.9^{3}7585$

c. d. n.

Tab. 2 c. d.

z	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	$.9^{3}8074$	$.9^{3}8146$	$.9^{3}8215$	$.9^{3}8282$	$.9^{3}8347$
3.6	$.9^{3}8689$	$.9^{3}8739$	$.9^{3}7878$	$.9^{3}8834$	$.9^{3}8879$
3.7	$.9^{4}1158$	$.9^{4}1504$	$.9^{4}1838$	$.9^{4}2159$	$.9^{4}2468$
3.8	$.9^{4}4059$	$.9^{4}4331$	$.9^{4}4558$	$.9^{4}4777$	$.9^{4}4988$
3.9	$.9^{4}6092$	$.9^{4}6253$	$.9^{4}6406$	$.9^{4}6554$	$.9^{4}6696$
4.0	$.9^{4}7439$	$.9^{4}7536$	$.9^{4}7649$	$.9^{4}7748$	$.9^{4}7843$
4.1	$.9^{4}8338$	$.9^{4}8409$	$.9^{4}8477$	$.9^{4}8542$	$.9^{4}8605$
4.2	$.9^{4}8931$	$.9^{4}8978$	$.9^{5}0226$	$.9^{5}0655$	$.9^{5}1066$
4.3	$.9^{5}3193$	$.9^{5}3497$	$.9^{5}3788$	$.9^{5}4066$	$.9^{5}4332$
4.4	$.9^{5}5706$	$.9^{5}5902$	$.9^{5}6089$	$.9^{5}6268$	$.9^{5}6439$
4.5	$.9^{5}7318$	$.9^{5}7442$	$.9^{5}7561$	$.9^{5}7675$	$.9^{5}7784$
4.6	$.9^{5}8340$	$.9^{5}8419$	$.9^{5}8494$	$.9^{5}8566$	$.9^{5}8634$
4.7	$.9^{5}8983$	$.9^{6}0320$	$.9^{6}0789$	$.9^{6}1235$	$.9^{6}1661$
4.8	$.9^{6}38\ 27$	$.9^{6}4131$	$.9^{6}4420$	$.9^{6}4696$	$.9^{6}4958$
4.9	$.9^{6}6289$	$.9^{6}6475$	$.9^{6}6652$	$.9^{6}6821$	$.9^{6}6981$

Dla ujemnych wartości z wartość odczytaną z tablicy odejmujemy od jedności, np. dla z = -1.11 wartość $\phi(z)$ = 1-0.8665 = 0.1335

Tab. 3. Graniczne wartości krytyczne λ_α rozkładu λ Kołmogorova

α	0.05	0.01
	1.3581	1.6276

Tab. 4. Wartości krytyczne T_α w teście MANNA-WHITNEYA/WILCOXONA (test dwustronny)

n_2	α	n_1 (mniejsze)													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	0.05			10											
	0.01			-											
5	0.05		6	11	17										
	0.01		-	-	15										
6	0.05		7	12	18	26									
	0.01		-	10	16	23									
7	0.05		7	13	20	27	36								
	0.01		-	10	17	24	32								
8	0.05	3	8	14	21	29	38	49							
	0.01	-	-	11	17	25	34	43							
9	0.05	3	8	15	22	31	40	51	63						
	0.01	-	6	11	18	26	35	45	56						
10	0.05	3	9	15	23	32	42	53	65	78					
	0.01	-	6	12	19	27	37	47	58	71					
11	0.05	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96				
	0.01	-	6	12	20	28	38	49	61	74	87				
12	0.05	4	10	17	26	35	46	58	71	85	99	115			
	0.01	-	7	13	21	30	40	51	63	76	90	106			
13	0.05	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137		
	0.01	-	7	14	22	31	41	53	65	79	93	109	125		
14	0.05	4	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160	
	0.01	-	7	14	22	32	43	54	67	81	96	112	129	147	
15	0.05	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164	185
	0.01	-	8	15	23	33	44	56	70	84	99	115	133	151	171
16	0.05	4	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169	
	0.01	-	8	15	24	34	46	58	72	86	102	119	137	155	
17	0.05	5	12	21	32	43	56	70	84	100	117	135	154		
	0.01	-	8	16	25	36	47	60	74	89	105	122	140		
18	0.05	5	13	22	33	45	58	72	87	103	121	139			
	0.01	-	8	16	26	37	49	62	76	92	108	125			
19	0.05	5	13	23	34	46	60	74	90	107	124				
	0.01	3	9	17	27	38	50	64	78	94	111				
20	0.05	5	14	24	35	48	62	77	93	110					
	0.01	3	9	18	28	39	52	66	81	97					

Tab. 5 Wartości krytyczne W_α w teście sumy rang W przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ i $\alpha = 0.95$

n_2 \ n_1	4	5	6	7	8	9
2					2_{10}	2_{11}
3			4_{13}	4_{14}	4_{16}	4_{17}
4	6_{14}	6_{16}	7_{17}	7_{19}	7_{21}	8_{22}
5		10_{20}	10_{23}	11_{24}	11_{26}	12_{28}
6			14_{28}	15_{30}	16_{32}	16_{35}
7				9_{37}	20_{39}	21_{42}
8					26_{46}	27_{49}
9						33_{57}

Tab. 5 c. d.

n_2 \ n_1	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	2_{12}	2_{13}	2_{14}	2_{15}	2_{16}	2_{17}	2_{17}	2_{19}	2_{19}
3	5_{18}	5_{19}	5_{21}	5_{22}	5_{23}	6_{24}	6_{24}	6_{25}	6_{26}
4	8_{24}	9_{26}	9_{27}	9_{29}	10_{30}	10_{32}	11_{33}		
5	12_{30}	13_{32}	14_{34}	14_{36}	15_{38}	15_{40}			
6	17_{37}	18_{40}	19_{41}	19_{44}	20_{46}				
7	22_{44}	23_{47}							
8	28_{52}	29_{55}	30_{58}						
9	34_{60}	36_{63}							
10	41_{69}								

Tab. 6 Wartości krytyczne χ^2_α w rozkładzie χ^2

ν \ α	0.990	0.950	0.05	0.01	0.001
1	0.0^3157	0.00393	3.841	6.635	10.827
2	0.0201	0.103	5.991	9.210	13.815
3	0.115	0.352	7.815	11.345	16.268
4	0.297	0.711	9.488	13.277	18.465
5	0.554	1.145	11.070	15.086	20.517
6	0.872	1.635	12.592	16.812	22.457
7	1.239	2.167	14.067	18.475	24.322
8	1.646	2.733	15.507	20.090	26.125
9	2.088	3.325	16.919	21.666	27.877
10	2.558	3.940	18.307	23.209	29.588
11	3.053	4.575	19.675	24.725	31.264
12	3.571	5.226	21.026	26.217	32.909
13	4.107	5.892	22.362	27.688	34.528
14	4.660	6.571	23.685	29.141	36.123
15	5.229	7.261	24.996	30.578	37.679
16	5.812	7.962	26.296	32.000	39.252
17	6.408	8.672	27.587	33.409	40.790
18	7.015	9.390	28.869	34.805	42.312
19	7.633	10.117	30.144	36.191	43.820
20	8.260	10.851	31.410	37.566	45.315
21	8.897	11.591	32.671	38.932	46.797
22	9.542	12.338	33.924	40.289	48.268
23	10.196	13.091	35.172	41.638	49.728
24	10.857	13.848	36.415	42.980	51.179
25	11.524	14.611	37.652	44.314	52.620
26	12.198	15.379	38.885	45.642	54.052
27	12.879	16.151	40.113	46.963	55.476
28	13.565	16.928	41.337	48.278	56.893
29	14.256	17.708	42.557	49.588	58.302
30	14.953	18.493	43.773	50.892	59.703
31	15.66	19.28	44.99	52.19	61.10
32	16.36	20.07	46.19	53.49	62.49
33	17.07	20.87	47.40	54.78	63.87
34	17.79	21.66	48.60	56.06	65.25
35	18.51	22.47	49.80	57.34	66.62
36	19.23	23.27	51.00	58.62	67.99
37	19.96	24.07	52.19	59.89	69.35
38	20.69	24.88	53.38	61.16	70.70
39	21.43	25.70	54.57	62.43	72.05
40	22.16	26.51	55.76	63.69	73.40

c. d. n.

Tab. 6 c. d.

ν \ α	0.990	0.950	0.05	0.01	0.001
45	25.90	30.61	61.60	69.96	80.08
50	29.71	34.76	67.50	76.15	86.66
60	37.48	43.19	79.08	88.38	99.61
70	45.44	51.74	90.53	100.4	112.3
80	53.54	60.39	101.9	112.3	124.8
90	61.75	69.13	113.1	124.1	137.2
100	70.06	77.93	124.3	135.8	147.4
120	86.92	95.7	146.6	159.0	173.6
150	112.7	122.7	179.6	193.2	209.3
200	156.4	168.3	234.0	249.4	267.5

Tab. 7 Wartości krytyczne r_α w teście znaków

n	α 0.01	α 0.05	n	α 0.01	α 0.05	n	α 0.01	α 0.05
6	-	0	33	9	11	60	20	23
7	0	0	34	9	11	61	21	23
8	0	1	35	10	12	62	21	24
9	0	1	36	10	12	63	22	24
10	0	1	37	10	13	64	22	24
11	1	2	38	11	13	65	22	25
12	1	2	39	11	13	66	23	25
13	1	3	40	12	14	67	23	26
14	2	3	41	12	14	68	23	26
15	2	3	42	13	15	69	24	27
16	2	4	43	13	15	70	24	27
17	3	4	44	13	16	71	25	28
18	3	5	45	14	16	72	25	28
19	4	5	46	14	16	73	26	28
20	4	5	47	15	17	74	26	29
21	4	6	48	15	17	75	27	29
22	5	6	49	15	18	76	27	30
23	5	7	50	16	18	77	28	30
24	5	7	51	16	19	78	28	31
25	6	7	52	17	19	79	29	31
26	6	8	53	17	20	80	29	32
27	7	8	54	18	20	81	29	32
28	7	9	55	18	20	82	30	33
29	7	9	56	18	21	83	30	33
30	8	10	57	19	21	84	30	33
31	8	10	58	19	22	85	31	33
32	8	10	59	20	22	86	31	34
						88	32	35
						90	33	36
						92	34	37
						94	35	38
						96	36	39
						100	37	41

Dla n > 100 wartością r_α jest największa liczba całkowita mniejsza od $0.5\,(n - 1) - k\sqrt{n + 1}$

gdzie k = 1.2879 dla α = 0.01 lub k = 0.98 dla α = 0.05

Tab. 8 Wartości krytyczne T_α w teście rangowanych znaków WILCOXONA (test dwustronny)

n \ α	0.05	0.01
6	0	-
7	2	-
8	3	0
9	5	1
10	8	3
11	10	5
12	13	7
13	17	9
14	21	12
15	25	15
16	29	19
17	34	23
18	40	27
19	46	32
20	52	37
21	58	42
22	65	48
23	73	54
24	81	61
25	89	68

Tab. 9. Wartości krytyczne H_α w teście KRUSKALA-WALLISA

k = 3

liczebność prób	α = 0.05	α = 0.01
3 2 2	4.714	-
3 3 1	5.143	-
3 3 2	5.361	-
3 3 3	5.600	-
4 2 1	-	-
4 2 2	5.333	-
4 3 1	5.208	-
4 3 2	5.444	6.444
4 3 3	5.791	6.745
4 4 1	4.967	6.667
4 4 2	5.455	7.036
4 4 3	5.598	7.144
4 4 4	5.692	7.654
5 2 1	5.000	-
5 2 2	5.160	6.533
5 3 1	4.960	-
5 3 2	5.251	6.909
5 3 3	5.648	7.079
5 4 1	4.985	6.955
5 4 2	5.273	7.205
5 4 3	5.656	7.445
5 4 4	5.657	7.760
5 5 1	5.127	7.309
5 5 2	5.338	7.338
5 5 3	5.705	7.578
5 5 4	5.666	7.823
5 5 5	5.780	8.000
6 1 1	-	-
6 2 1	4.822	-
6 2 2	5.345	6.655
6 3 1	4.855	6.873
6 3 2	5.348	6.970
6 3 3	5.615	7.410
6 4 1	4.947	7.106
6 4 2	5.340	7.340
6 4 3	5.610	7.500
6 4 4	5.681	7.795
6 5 1	4.990	7.182
6 5 2	5.338	7.376
6 5 3	5.602	7.590
6 5 4	5.661	7.936
6 5 5	5.729	8.028
6 6 1	4.945	7.121
6 6 2	5.410	7.467
6 6 3	5.625	7.725
6 6 4	5.724	8.000
6 6 5	5.765	8.124
6 6 6	5.801	8.222
7 7 7	5.819	8.378
8 8 8	5.805	8.465

kontynuacja

k = 4

2 2 2 1	5.679	-
2 2 2 2	6.167	6.667
3 1 1 1	-	-
3 2 1 1	-	-
3 2 2 1	5.833	-
3 2 2 2	6.333	7.133
3 3 1 1	6.333	-
3 3 2 1	6.244	7.200
3 3 2 2	6.527	7.636
3 3 3 1	6.600	7.400
3 3 3 2	6.727	8.015
3 3 3 3	7.000	8.538
4 1 1 1	-	-
4 2 1 1	5.833	-
4 2 2 1	6.133	7.000
4 2 2 2	6.545	7.391
4 3 1 1	6.178	7.067
4 3 2 1	6.309	7.455
4 3 2 2	6.621	7.871
4 3 3 1	6.545	7.758
4 3 3 2	6.795	8.333
4 3 3 3	6.984	8.659
4 4 1 1	5.945	7.909
4 4 2 1	6.386	7.909
4 4 2 2	6.731	8.346
4 4 3 1	6.635	8.231
4 4 3 2	6.874	8.621
4 4 3 3	7.038	8.876
4 4 4 1	6.725	8.588
4 4 4 2	6.957	8.871
4 4 4 3	7.142	9.075
4 4 4 4	7.235	9.287

Tab. 9 c. d.

k = 5		
2 2 1 1 1	-	-
2 2 2 1 1	6.750	-
2 2 2 2 1	7.133	7.533
2 2 2 2 2	7.418	8.291
3 1 1 1 1	-	-
3 2 1 1 1	6.583	-
3 2 2 1 1	6.800	7.600
3 2 2 2 1	7.309	8.127
3 2 2 2 2	7.682	8.682
3 3 1 1 1	7.111	-
3 3 2 1 1	7.200	8.073
3 3 2 2 1	7.591	8.576
3 3 2 2 2	7.910	9.115
3 3 3 1 1	7.576	8.424
3 3 3 2 1	7.769	9.051
3 3 3 2 2	8.044	9.505
3 3 3 3 1	8.000	9.451
3 3 3 3 2	8.200	9.876
3 3 3 3 3	8.333	10.200

Tab. 10 Wartości krytyczne W_α w teście sumy rang przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$

m \ n	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1.00	0.82	0.71	0.65	0.62	0.60	0.58	0.56
4	0.81	0.65	0.54	0.51	0.48	0.46	0.45	0.44
5	0.64	0.52	0.44	0.41	0.39	0.38	0.36	0.35
6	0.58	0.42	0.37	0.35	0.33	0.32	0.31	0.30
7	0.51	0.36	0.32	0.30	0.29	0.27	0.26	0.26
8	0.39	0.32	0.29	0.27	0.25	0.24	0.23	0.23
9	0.35	0.28	0.26	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20
10	0.31	0.25	0.23	0.21	0.20	0.20	0.20	0.20
12	0.25	0.21	0.19	0.18	0.17	0.16	0.16	0.15
14	0.21	0.18	0.17	0.16	0.15	0.14	0.14	0.13
16	0.19	0.16	0.15	0.14	0.13	0.12	0.12	0.12
18	0.17	0.14	0.13	0.12	0.11	0.11	0.11	0.10
20	0.15	0.13	0.12	0.11	0.10	0.10	0.10	0.09
25	0.12	0.10	0.09	0.09	0.08	0.08	0.08	0.07
30	0.10	0.09	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07	0.06

Tab. 11 Wartości krytyczne m_α w teście istotności różnic dla wielu prób przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$

n / k	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	30	35	40	∞
2	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
3		5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7
4		5	5	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
5		5	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8
6		5	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	8	8
7		5	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8
8		5	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
9		5	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9
10		5	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9
11			6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9
12			6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9
13			6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9
14			6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9
15			6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9
16			6	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9
17			6	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9
18			6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	10
19			6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	10
20			6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	10